N° d'ordre : 416

THÈSE

présentée

A L'UNIVERSITÉ PAUL SABATIER DE TOULOUSE

pour l'obtention

du grade de Docteur ès Sciences Mathématiques

par

Bernard LACAZE

SUR L'ÉCHANTILLONNAGE DES PROCESSUS DE KHINTCHINE ET SES APPLICATIONS

Soutenue le 21 Novembre 1970, devant la Commission d'examen :

MM. les Professeurs NOUGARO — Président

FORTET
MERIC
CAUSSINUS
ETTINGER
— Examinateurs

N° d'ordre : 416

THÈSE

présentée

A L'UNIVERSITÉ PAUL SABATIER DE TOULOUSE

pour l'obtention

du grade de Docteur ès Sciences Mathématiques

par

Bernard LACAZE

SUR L'ÉCHANTILLONNAGE DES PROCESSUS DE KHINTCHINE ET SES APPLICATIONS

Soutenue le 21 Novembre 1970, devant la Commission d'examen :

MM. les Professeurs NOUGARO — Président

FORTET
MERIC
CAUSSINUS
ETTINGER
— Examinateurs

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

UNIVERSITE PAUL SABATIER

TOULOUSE

DIRECTION DE L'UNIVERSITE

M. LARENG, Président
M. MATHIS, 1er Vice-Président
M. MARTIN, 2ème Vice-Président
M. MOUNIQ, 3ème Vice-Président

H O N O R A R I A T

M. BLAIZOT..... Doyen honoraire
M. CAPDECOMME..... Doyen honoraire, Recteur honoraire, Professeur honoraire
M. DELTHEIL..... Recteur honoraire, Doyen honoraire, Professeur honoraire
M. DUPOUY..... Membre de l'Institut, Doyen honoraire, Directeur Général honoraire du C.N.R.S
M. DURAND..... Doyen honoraire
M. FOUCHE..... Professeur honoraire
M. GAUSSENS..... Professeur honoraire, Correspondant de l'Institut
M. JACQUES..... Professeur honoraire
M. MIGNONAC..... Professeur honoraire
M. MORQUER..... Professeur honoraire, correspondant de l'Institut
M. SECONDAT..... Professeur honoraire
M. VANDEL..... Professeur honoraire, Membre de l'Institut
M. TEISSIE-SOLIER... Professeur honoraire

P R O F E S S E U R S

M. ESCANDE..... Mécanique des Fluides, Membre de l'Institut
M. CASTERAS..... Géologie, correspondant de l'Institut
M. BEDOS..... Chimie
M. CAPDECOMME..... Minéralogie
M. DUPIN..... Radioélectricité

M. NOUVEL..... Biologie Générale
M. GALLAIS..... Chimie, correspondant de l'Institut
M. DURAND..... Physique
M. FERT..... Physique
M. DIEHL..... Agronomie
M. LESBRE..... Chimie Organique
M. BRUNEL..... Physiologie Végétale
M. HURON..... Mathématiques Appliquées
M. MARGULIS..... Pédologie
M. TRICHE..... Chimie Analytique et Spectrographie
M. LEDOUX..... Zoologie appliquée
M. RIVALS..... Agriculture
M. PERRIER..... Physique
M. MATHIS..... Chimie
M. ORLIAC..... Géochimie et Minéralogie
M. LAFOURCADE..... Physique
M. ANGELIER..... Zoologie
Melle DE FERRE..... Botanique
M. FARRAN..... Minéralogie et Géothechnique
M. LAUDET..... Physique théorique et calcul numérique
M. SERFATY..... Biologie animale
M. NOUGARO..... Hydraulique générale et appliquée
M. LAGASSE..... Electrotechnique
M. GARDY..... Génie Chimique
M. BLANC..... Physique nucléaire
M. BIREBENT..... Electronique appliquée
M. VOIGT..... Chimie minérale
M. LEREDDE..... Botanique
M. LELUBRE..... Géologie
M. TROCHAIN..... Botanique
M. MASDUPY..... Chimie
M. LALAGUE..... Mathématiques générales
M. DESSENS..... Physique du globe, correspondant de l'Institut
M. BOUIGUE..... Astronomie
M. COUCHET..... Physique
M. LEJEUNE..... Chimie
M. LASCOMBES..... Botanique
M. ASSELINEAU..... Chimie biologique
M. MAURET..... Chimie systématique
M. AGID..... Physiologie
M. MONTANT..... Cryptogamie
M. GAUTIER..... Physique
M. CRUMEYROLLE..... Mathématiques
M. GOURINARD..... Géologie
M. PULOU..... Minéralogie
M. CAMBOU..... Physique spatiale
M. MIQUEL..... Chimie
M. LACOSTE..... Electrotechnique

M. THIBAULT..... Mécanique Rationnelle et appliquée
M. MONTEL..... CHimie Physique et Electrochimie
M. MASCART..... Mathématiques
M. MEDIONI..... Psychophysiologie
M. THIRRIOT..... Hydrodynamique ENSEEIHT
M. BRENON..... Géologie
M. LAFON..... Calcul différentiel et intégral
M. RAYNAUD P..... Physiologie animale
M. ZALTA..... Chimie biologique
M. SEVELY..... Electrotechnique
M. POMMIEZ..... Mathématiques
M. REY..... Biologie végétale
M. COULOMB..... Physique
M. TRINQUIER..... Physique
M. MARONI..... Chimie
M. BEETSCHEN..... Biologie Générale
M. GRUAT..... Mécanique des Fluides (Hydraulique)
M. DERACHE..... Physiologie animale

PROFESSEURS ASSOCIES

M. MANSOUR
M. SAKUMA

PROFESSEURS SANS CHAIRE

M. HAMANT..... Botanique
Me BRUNEL..... Physiologie végétale
Melle BERDUCOU..... Physiologie végétale
M. PICCA..... Physique
M. MERIC..... Mathématiques appliquées
Me LECAL..... Zoologie
M. BUGAREL..... Génie Chimique
M. MIROUSE..... Géologie
M. PILOD..... Physique
M. LARROQUE..... Physique
M. BARRANS..... Chimie
Me LAFON..... Mathématiques
Melle LAPEYRE..... Mathématiques (Informatique)
M. DAT..... Mécanique des fluides
M. JEANNIN..... Chimie Minérale
M. BERTRAND..... Chimie

M. SATGE..... Chimie Organique
M. DESQ..... Mathématiques
M. MAHENC..... Chimie
M. LATTES..... Chimie
M. ROCARD..... Electronique
M. DEGEILH..... Physique
M. FALLOT..... Biologie végétale, (viticulture et arboriculture)
M. POILBLANC..... Chimie
M. TOUZE..... Physiologie végétale
M. FRASNAY..... Mathématiques
M. CASSAGNAU..... Zoologie
M. GUERIN..... Mathématiques

MAITRES DE CONFERENCES

M. BLANCHARD..... Mathématiques
M. HOFFMANN..... Electronique
M. BITSCH..... Zoologie
M. FONTAN..... Physique Nucléaire
M. PESCIA..... Physique
M. SICARD..... Biologie génétique
M. CAUSSINUS..... Mathématiques appliquées
M. DE LOTH..... Chimie Physique
M. MARTY..... Physique Industrielle
M. BAUDRAS..... Chimie Biologique
M. DURAND P..... Physique
M. LEFEUVRE..... Electronique ENSEEIHT
M. SOUQUET..... Géologie
M. SAPORTE..... Physique
M. ATTEIA..... Mathématiques
M. ENJALBERT..... Chimie
M. IMBERT..... Psychophysiologie
M. SCHNEIDER..... Biologie cellulaire
M. ANGELINO..... Génie chimique
M. DABOSI..... ENSC
M. ETTINGER..... Mathématiques
M. CALVET..... Mécanique des fluides (ENSEEIHT)
M. PAGANI..... Physique
M. CUPPENS..... Mathématiques
M. MATHIEU..... Chimie analytique
M. TRANNOY..... Physique (ENSEEIHT)
M. CASTAGNETTO..... Mathématiques (ENSEEIHT)
M. GILOT..... Génie Chimique (Institut de génie chimique

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

M. PUN
M. PARKS

CHARGE D'ENSEIGNEMENT

M. BEAUFILS..... Informatique
M. DARROZES..... Mécanique
M. OLIVIER..... Mathématiques
Melle BARBANCE..... Mathématiques

Personnel de la Faculté affecté à l'Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse

---

PROFESSEURS

M. ROQUES..... Chimie Industrielle
M. GRATELOUP..... Génie Electrique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

M. CASSIGNOL..... Génie Electrique
M. COLLETTE..... Physique

MAITRES DE CONFERENCES

M. FAGET..... Physique
M. TRUCHASSON..... Mécanique
M. SCHUTTLER..... Physique
M. MIRA..... Génie Electrique
M. LETURCQ..... Génie Electrique
M. SIRIEYS..... Génie Civil
M. DURAND G..... Chimie
M. CARRARA..... Physique

C H A R G E D'E N S E I G N E M E N T

M. VERDIER..... Chimie

Personnel affecté à l'Institut Universitaire de Technologie de Toulouse

---

M A I T R E S DE C O N F E R E N C E S

M. MARTIN..... Génie Electrique
M. THENOZ..... Minéralogie
M. PERENNOU..... Informatique

C H A R G E D'E N S E I G N E M E N T

M. REY..... Génie Electrique

A D M I N I S T R A T I O N

M. PRINEAU..... Conseiller Administratif des services Universitaires

Monsieur le Professeur Léopold ESCANDE , Membre de l'Institut Directeur de l'E.N.S.E.E.I.H.T , a présenté à l'Académie des Sciences plusieurs notes contenant certains résultats de ce mémoire ; qu'il veuille bien trouver ici l'expression de notre gratitude.

Monsieur le Professeur Jean NOUGARO, nous a toujours témoigné sa confiance, et nous a fait l'honneur d'accepter la présidence du jury . Nous l'en remercions vivement.

Monsieur le Professeur FORTET a bien voulu se pencher sur ce travail et accepter de faire partie de notre jury. Cette présence est pour nous le meilleur des encouragements et nous ne saurions trop l'en remercier.

Nous voulons témoigner notre gratitude à Monsieur le Professeur Jean MERIC qui a été un guide précieux aussi bien dans notre enseignement que dans notre recherche.

Nous tenons à remercier également

- Monsieur le Professeur Henri CAUSSINUS qui a bien voulu, en toutes occasions témoigner son amitié à notre égard, en particulier en faisant partie du jury.

- Monsieur le Professeur Pierre ETTINGER, qui nous a permis, par ses critiques, d'éviter bien des erreurs.

- Monsieur le Professeur Jean Claude HOFFMANN, par sa haute compétence, a permis d'exploiter au mieux les résultats de ce travail ; sa confiance et son amitié ont toujours été pour nous le soutien le plus précieux.

- Monsieur Jean CASSINET pour sa participation au chapitre VIII de ce travail, et Monsieur Pal FISCHER pour ses précieux conseils .

Nous n'oublierons pas,dans nos remerciements, nos camarades du G.A.P.S.E. et du département de Mathématiques de l'I.N.S.A. pour l'intérêt constant qu'ils ont porté à nos recherches, et Mesdemoiselles ALTMAN,DENJEAN, et LINARES qui ont toujours assuré avec compétence et dévouement la mise en page de nos travaux.

C H A P I T R E - I -

I N T R O D U C T I O N

1- Processus de KHINTCHINE

1-1 Définition et propriétés

On appelle processus de KHINTCHINE, un processus X(t) qui est à la fois stationnaire au sens large (ou d'ordre deux) , et continu en moyenne quadratique . Il est donc caractérisé par les trois propriétés suivantes :

- $E\ [X(t)] = m$, m constante complexe .
- $E\ [X(t)\ \overline{X(t+\tau)}] = \rho(\tau)$, $\forall t, \tau \in R$
- $\rho(\tau)$ continue à l'origine

Sans perte de généralité, on peut supposer $m = 0$. D'autre part, la continuité à l'origine de $\rho(\tau)$ entraîne sa continuité uniforme sur R .

Un calcul simple montre que $\rho(\tau)$ est une fonction définie positive c'est-à-dire que, quelque soit l'ensemble de nombres complexes $a_1, \ldots\ldots a_n$, et l'ensemble de réels $t_1, \ldots\ldots t_n$, on a :

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_i\ \overline{a_j}\ \rho(\ t_i - t_j\ ) \geq 0$$

L'ensemble des fonctions d'autocorrélation de processus de KHINTCHINE est donc inclus dans l' ensemble des fonctions définies positives. En fait, on démontre que ces deux ensembles sont confondus, c'est-à-dire que réciproquement, toute fonction définie positive est la fonction d'autocorrélation d'un processus de KHINTCHINE. Il s'ensuit, d'après le théorème de S. BOCHNER, que $\rho(\tau)$

peut se mettre sous la forme $\rho(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\tau x}\, dS(x)$, où $S(x)$ est une fonction réelle, non décroissante et bornée. D'après un théorème classique d'analyse, $S(x)$ peut donc se décomposer en ses parties continue $S_C(x)$ et discontinue $S_D(x)$. Revenant à $\rho(\tau)$, on voit alors qu'elle est la transformée de FOURIER-STIELTJES de la somme de deux fonctions, l'une continue monotone non décroissante bornée, et l'autre en escalier, non décroissante et bornée, l'ensemble des discontinuités étant au plus dénombrable. On peut donc écrire $\rho(\tau)$ sous la forme $\rho(\tau) = \rho_1(\tau) + \rho_2(\tau)$, $\rho_1(\tau)$ étant la transformée de FOURIER de $S_C(x)$ et $\rho_2(\tau)$ la transformée de FOURIER-STIELTJES de $S_D(x)$.

$\rho_1(\tau)$ est une fonction continue puisque $S_C(x)$ l'est . D'autre part, d'après le théorème de RIEMANN-LEBESGUE , on peut assurer que $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T |\rho_1(t)|^2 dt = 0$.

Enfin, on démontre que $\rho_1(\tau)$, fonction continue peut se décomposer en la somme de deux fonctions, l'une absolument continue, et tendant vers 0 avec $\frac{1}{\tau}$, l'autre continue , monotone et à dérivée presque partout nulle. Nous supposerons toujours que cette dernière fonction est nulle, ce qui fait que $\rho_1(\tau)$ tendra toujours vers 0 avec $\frac{1}{\tau}$; $\rho_2(\tau)$, transformée de FOURIER d'une fonction en escalier, est une fonction presque périodique au sens de BOHR. La somme des sauts de $S_D(x)$ étant finie , il s'ensuit que $\rho_2(\tau)$ est continue, et décomposable en une série de FOURIER qui converge uniformément vers $\rho_2(\tau)$.

Tout ce que nous venons d'écrire est encore vrai pour un processus de KHINTCHINE réel. Les fonctions $\rho(\tau)$, $\rho_1(\tau)$, $\rho_2(\tau)$, sont alors réelles et l'expression de $\rho(\tau)$ sous la forme de sa transformée de FOURIER-STIELTJES se réduit à $\rho(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos\tau x \, dS(x)$, puisque $S(x)$ est dans tous les cas réel . Dans les chapitres suivants, nous ne considèrerons d'ailleurs que les processus de KHINTCHINE réels sans que cela nuise à la généralité des questions traitées.

1.2 Historique

C'est parcequ'il était impossible de résoudre certains problèmes physiques, comme par exemple ceux de la mécanique statistique [1] , que KHINTCHINE (en 1933) a introduit la notion de processus réel, stationnaire au sens large et continu. Dans son célèbre mémoire [2] , il montre que les fonctions d'autocorrélation de tels processus sont définies positives ce qui lui permet d'appliquer le théorème de représentation spectrale de BOCHNER [3] . Il en déduit la décomposition des fonctions d'autocorrélation sous la forme de deux composantes, l'une presque périodique et l'autre de carré moyen fini.

En 1938 , SLUTSKY [4] décomposait le processus lui-même en composantes non corrélées. Un an plus tard, KAMPE de FERIET [5] appliquait la théorie de KHINTCHINE à la turbulence homogène. D'autre part, s'appuyant sur un résultat dû à de LA VALLEE POUSSIN, il faisait apparaître les composantes singulière et absolument continue de $\rho(\tau)$ (voir [6] p 6-9) .

H.CRAMER [7] et M. LOEVE [8], [9] ont généralisé cette théorie au cas de processus complexes, et ont précisé certaines démonstrations de KHINTCHINE.

De nombreux ouvrages ont été écrits sur ce sujet . Citons celui de P. LEVY [10] dont la première édition remonte à 1948 ; par le biais de l'étude des fonctions caractéristiques, LEVY a participé d'une manière importante à l'élaboration de cette théorie. Il présente d'autre part un ensemble exhaustif d'exemples de processus stationnaires . Plus récemment, H. CRAMER et M.R. LEADBETTER [11] ont fait le point sur ce sujet . Pour les fonctions définies positives, on peut consulter KY-FAN [12] qui développe aussi un sujet parallèle, celui des fonctions complètement monotones .

2- Loi des grands nombres et ergodicité

Depuis J. BERNOULLI, beaucoup de mathématiciens se sont penchés sur le problème de la convergence des moyennes de variables aléatoires. Une somme considérable de résultats existent dans le cas des suites de variables aléatoires indépendantes. Ils sont dus pour leur plus grande partie à KOLMOGOROV, KHINTCHINE, GNEDENKO et LEVY . Ils constituent la loi des grands nombres. Voir [13] à [16].

En ce qui concerne les processus de KHINTCHINE, deux problèmes se posent : l'étude des intégrales $\frac{1}{T}\int_0^T X(t)\,dt$ et l'étude des sommes de la forme $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X(t_i)$. Dans [2], KHINTCHINE a démontré que $\frac{1}{T}\int_0^T X(t)\,dt$ convergeait en probabilité vers 0 . A. BLANC-LAPIERRE et R. BRARD [17], [18], [19] ont donné des conditions pour que cette conver-

gence soit presque sûre .

KHINTCHINE [20] a étudié les moyennes arithmétiques de variables aléatoires appartenant à des séries stationnaires . Il a démontré que ces moyennes convergeaient en moyenne quadratique , mais que cette convergence pouvait être aussi lente que l'on voulait . On peut d'autre part , donner une C.N.S. pour que ces moyennes arithmétiques convergent vers 0 (voir [21] pp.74-76) . Un cas particulier est constitué par l'échantillonnage périodique des processus de KHINTCHINE . En effet, si l'on considère la variable aléatoire $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X(i\theta)$, la suite $\{X(i\theta)\}$ est une suite stationnaire . Si la suite $\{t_i\}$ n'est pas périodique, la suite $\{X(t_i)\}$ ne sera pas stationnaire, et, en général, ne sera même pas asymptotiquement stationnaire . Peut-on alors appliquer la loi des grands nombres à la suite $\{X(t_i)\}$?

A. BLANC-LAPIERRE [22],[23], [24], s'est placé dans le cas d'un échantillonnage aléatoire, c'est-à-dire qu'il suppose que la suite $\{t_i\}$ est elle même aléatoire. Il étudie alors la convergence presque sûre des moyennes arithmétiques vers 0 , et compare les resultats avec ceux obtenus pour les moyennes temporelles .(Pour un critère sur la convergence presque sûre on peut se rapporter à [15] ou [25] p.66).

Dans les chapitres 2,3,4, et 5,nous nous interesserons à l'échantillonnage par des suites arithmétiques . Nous nous baserons pour cela sur la

décomposition de $\rho(\tau)$ donnée dans le § 1-1 . Nous verrons que le problème de la convergence en moyenne quadratique de $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X(t_i)$ se résout alors pour une classe très large d'échantillonnages : plus précisément la classe des suites qui possèdent une fonction de répartition modulo $\theta (\theta \in R_+)$

3- Génération des suites

L'expérience montre que la plupart des suites physiques sont uniformément réparties (ou uniformément denses) modulo θ ($\theta \in R_+^*$). L'arithmétique nous donne d'autre part des moyens de nous assurer qu'une suite possède une telle propriété . H. WEYL [26] , [27] donna le premier des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il en soit ainsi . D'autre part, VAN DER CORPUT [28] a démontré un critère simple qui permet de construire des suites uniformément réparties à partir de suites possédant la même propriété. En fait, mis à part les suites simples, telles que les suites polynomiales , on ne sait en général pas reconnaître la distribution d'une suite, et ce genre de problème reste ouvert .

Ceci est bien regrettable car une branche de l'analyse mathématique (ou du calcul des probabilités ?) , la méthode de Monte-Carlo, emploie de manière extensive les suites à répartition uniforme . Aussi [29] a-t-on inventé des méthodes de génération . Ces méthodes sont en général empiriques et ne sont justifiées que par des tests statistiques , eux-mêmes souvent sujets à caution, à tel point qu'on se trouve obligé d'en employer

plusieurs (jusqu'à 8) pour tester une seule suite. En général, on se contente de suites calculées sur ordinateur, ce qui fait qu'en plus elles sont à fonction de répartition discontinue . Certains auteurs ont cependant cherché à chiffrer l'écart entre ces distributions et la répartition idéale . En particulier [30][31] [32] et [33] M.M. BASS et BERTRANDIAS ont établi des résultats intéressants à l'aide de la décomposition des irrationnels en fractions continues ; ils comparent d'autre part l'emploi des suites aléatoires et des suites arithmétiques dans le calcul des intégrales définies .

De manière à exploiter les résultats des chapitres 3, 4, 5, il était nécessaire de générer des suites à répartition modulo θ donnée . Cela est possible mathématiquement à partir de suites uniformément réparties . La transposition physique étant trop couteuse , nous avons préféré développer dans le chapitre 6 une méthode basée sur la "roue de la fortune" [34] . Elle consiste à réunir des suites de la forme {nμ} préalablement filtrées , et à générer ainsi des suites à fonction de répartition continue ou non, qui sont les interpolées linéaires des fonctions désirées . Il est certain d'autre part que de telles suites peuvent être générées à partir de bruit physique . Elles ont alors un caractère aléatoire. Ces suites intervenant par leurs propriétés asymptotiques, cet aspect non déterministe ne revêt dans les applications aucune importance .

Sur les suites, leur répartition et les tests afférents, on peut consulter, en plus des ouvrages déjà cités, les articles [35] à [38]

4- Application à la détection

Le fait qu'une estimation de la moyenne d'un processus puisse être convergente ou divergente suivant qu'il contient un signal ou non , fait tout de suite penser à une méthode de détection . Nous nous placerons dans le cas de l'" observateur idéal " , auquel on ne demande que de répondre oui ou non sous l'influence de situations alternatives . Autrement dit, cet observateur n'a aucune connaissance d'éventuelles probabilités à priori ou a posteriori portant sur la présence ou l'absence d'un quelconque signal, utile ou parasite.

En fait, nous ne donnons dans le chapitre 7 , que quelques idées assorties de quelques exemples ; nous espérons pouvoir par la suite développer cette méthode . Nous introduirons la notion de "détection en probabilité" , qui est parallèle à la notion de convergence en probabilité . De la même manière, on aurait pu,grâce aux résultats cités dans [17] , [18] , [19] , introduire la notion de "détection presque sûre " . La nuance entre les deux modes de détection ne porte que sur le bruit, qui doit obéir à des conditions plus restrictives dans le second cas que dans le premier . De façon à ne pas faire d'hypothèses supplémentaires , nous nous sommes limités volontairement au premier cas.

Il est bien évident que le problème de la détection d'un signal dans un bruit est autrement complexe, mais il intervient dans le chapitre 7

comme une suite logique des chapitres précédents . Pour une vue plus large du problème, on peut consulter [39] , où Melle E. MOURIER présente clairement ce vaste problème . Sur un point de vue plus appliqué, les ouvrages [40] à [44] font autorité . Pour quelques exemples, voir aussi [45] et [46] .

De même, nous envisagerons, dans le chapitre 8 , un procédé de reconnaissance des formes . Nous nous placerons dans le cas particulier des formes périodiques de même période. Nous verrons alors que ce problème revient à celui de la résolution de systèmes linéaires particuliers . Nous nous sommes aperçus à postériori que les matrices représentant ces systèmes étaient bien connues des algébristes (et des électriciens) sous le nom de matrices de HADAMARD (ou matrices H) . Nous les appellons matrices n-détectrices parce que précisément elles sont susceptibles de détecter n signaux de même période. En particulier, le théorème 3 de ce chapitre peut se déduire directement du théorème de HADAMARD . Bien que notre démonstration soit plus compliquée que celle de HADAMARD, nous la transcrivons sans changement car elle est tout à fait différente . Sur ce sujet, on peut consulter [47] et [48] .

C H A P I T R E - II -

CONVERGENCE DE $\hat{m}_n$ LORSQUE $\lim_{\tau \to \infty} \rho(\tau) = 0$

1- Introduction

Soit $X(t)$ un processus de Khintchine tel que $\rho(\tau) = \rho_1(\tau)$, avec $\lim_{\tau\to\infty} \rho_1(\tau) = 0$. Etant donné une suite $\{t_i\}$ d'échantillonnage, on donne des conditions suffisantes de convergence en moyenne quadratique de l'estimateur de la moyenne $\hat{m}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X(t_i)$.

Les théorèmes I et II peuvent s'appliquer directement à l'étude des processus physiques. Le théorème III est une généralisation dont les hypothèses portent à la fois sur la vitesse de croissance de la suite $\{t_i\}$ et sur l'écart des éléments de la suite d'échantillonnage. Rappelons que

$$\text{Var } \hat{m}_n = \frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^{n} \rho(t_i - t_j)$$

Pour simplifier les démonstrations, nous supposerons comme c'est l'usage $\rho(0) = 1$ sans que cela nuise à leur généralité.

2- 2-1 Théorème 1

H 1) $\lim_{\tau\to\infty} \rho(\tau) = 0 \qquad \rho(0) = 1 \qquad (H_1)$

2) $\exists\ \mu > 0$ tel que $t_{i+1} - t_i \geq \mu$, $\forall\ i$. (H_2)

C $\lim_{n\to\infty} \text{Var } \hat{m}_n = \text{Var } \hat{m}_\infty = 0$

On note $\{\tau_i^j\}$ la suite croissante $\{t_i - t_j\}$, où l'indice j est fixé et

l'indice i décrit N. Considérons la quantité $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \rho(\tau_i^j)$. Elle tend vers 0 avec $\frac{1}{n}$ (convergence au sens de Césaro d'ordre 1). Nous allons démontrer que cette convergence est uniforme par rapport à j, ce qui prouvera le théorème.

De H_1 on déduit :

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ T(\varepsilon) \text{ tel que } \tau > T(\varepsilon) \Rightarrow |\rho(\tau)| < \varepsilon$$

En posant $N(\varepsilon) = \text{Ent}\ \frac{T(\varepsilon)}{\mu} + 1$, la condition $|\tau_i^j| = |t_i - t_j| > T(\varepsilon)$ sera vérifiée au moins si $|i - j| > N(\varepsilon)$, c'est-à-dire

$$-N(\varepsilon) + j > i > N(\varepsilon) + j$$

Au plus $2N(\varepsilon) + 1$ éléments τ_i^j , à savoir $\tau_{j-N(\varepsilon)}^j, \ldots, \tau_j^j = 0, \ldots, \tau_{j+N(\varepsilon)}^j$ seront tels que, éventuellement $1 \geq |\rho(\tau_i^j)| \geq \varepsilon$. D'où les inégalités :

$$\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \rho(\tau_i^j)\right| \leq \left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{j-N(\varepsilon)-1} + \sum_{i=j+N(\varepsilon)+1}^{i=n} \rho(\tau_i^j)\right| + \left|\frac{1}{n} \sum_{i=j-N(\varepsilon)}^{j+N(\varepsilon)} \rho(\tau_i^j)\right|$$

$$< \frac{2N(\varepsilon) + 1}{n} + \frac{n - 2N(\varepsilon) - 1}{n} \varepsilon$$

Cette dernière quantité est indépendante de j, et il existe $N'(\varepsilon)$ tel que $n > N'(\varepsilon) \Rightarrow \frac{2N(\varepsilon) + 1}{n} < \varepsilon$, d'où $\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \rho(\tau_i^j)\right| < 2\varepsilon$, d'où la convergence uniforme de $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \rho(\tau_i^j)$ vers 0, ce qui démontre le théorème.

2-2 Conclusion

Le problème de l'échantillonnage périodique ou approximativement périodique est ainsi résolu. Le théorème II impose à la suite $\{t_i\}$ une convergence au sens de Césaro, ce qui permet des différences $t_{i+1} - t_i$ aussi petites que l'on veut.

3- 3-1 Théorème II

H 1) $\lim_{\tau\to\infty} \rho(\tau) = 0$ $\qquad \rho(0) = 1 \qquad (H_1)$

2) la suite $\{t_i - t_{i-1}\}$ converge vers $\mu > 0$ au sens de Césaro d'ordre 1 :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{t_n}{n} = \mu \qquad (H_2)$$

C $\qquad$ Var $\hat{m}_\infty = 0$

D'après H_1 : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, T(\varepsilon)$ tel que $|\tau| > T(\varepsilon) \Rightarrow |\rho(\tau)| < \varepsilon$

D'après H_2 : $\forall \varepsilon' > 0$, $\exists\, A(\varepsilon')$ tel que $n > A(\varepsilon') \Rightarrow \left|\frac{t_n}{n} - \mu\right| < \varepsilon'$

Soient p et q tels que $p > q > A(\varepsilon')$. Cherchons des conditions suffisantes sur p et q pour que $t_p - t_q > T(\varepsilon)$:

$$p(\mu-\varepsilon') < t_p < p(\mu+\varepsilon')$$

$$q(\mu-\varepsilon') < t_q < q(\mu+\varepsilon')$$

d'où $$t_p - t_q > p(\mu-\varepsilon') - q(\mu+\varepsilon') > T(\varepsilon)$$

soit $$p-q > \frac{T(\varepsilon)}{\mu - \varepsilon'} + 2q \frac{\varepsilon'}{\mu - \varepsilon'} \qquad (1)$$

ou de façon équivalente

$$p-q > \frac{T(\varepsilon)}{\mu + \varepsilon'} + 2p \frac{\varepsilon'}{\mu + \varepsilon'} \qquad (2)$$

les éléments $\tau_i^j = t_i - t_j$ susceptibles d'être tels que $|\rho(\tau_i^j)| > \varepsilon$ sont groupés autour de 0, soit $\tau^j_{k_1+1}, \ldots\ldots, 0, \ldots\ldots, \tau^j_{k_2-1}$

avec $k_1(j)$ et $k_2(j)$.

On cherche alors les conditions sur $k_1(j)$ et $k_2(j)$ pour que $|\rho(\tau^j_{k_1})| < \varepsilon$ et $|\rho(\tau^j_{k_2})| < \varepsilon$. D'après (1) et (2) :

$$j - k_1 > \frac{T(\varepsilon)}{\mu + \varepsilon'} + 2j \frac{\varepsilon'}{\mu + \varepsilon'}$$

$$k_2 - j > \frac{T(\varepsilon)}{\mu - \varepsilon'} + 2j \frac{\varepsilon'}{\mu - \varepsilon'}$$

On peut donc écrire, avec $\alpha(j) \in [0,1[$ et $\beta(j) \in [0,1[$

$$k_1 = j\left(1 - \frac{2\varepsilon'}{\mu + \varepsilon'}\right) - \frac{T(\varepsilon)}{\mu + \varepsilon'} - \alpha(j) \text{ ou } k_1 = 0$$

$$k_2 = j\left(1 + \frac{2\varepsilon'}{\mu - \varepsilon'}\right) + \frac{T(\varepsilon)}{\mu - \varepsilon'} + \beta(j) \text{ ou } k_2 = n$$

Il faut de plus que j, k_1 et k_2 soient supérieurs à $A(\varepsilon')$, ce qui implique seulement $k_1 > A(\varepsilon')$

soit

$$j > \frac{\mu + \varepsilon'}{\mu - \varepsilon'} \left(\Lambda(\varepsilon') + \frac{T(\varepsilon)}{\mu + \varepsilon'} + 1 \right)$$

On note $B(\varepsilon, \varepsilon')$ la partie entière du second membre.

Si $j > B(\varepsilon, \varepsilon')$ on peut écrire :

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \rho(\tau_i^j) \right| < \frac{k_2 - k_1}{n} + \varepsilon \qquad \text{(à fortiori si } n < k_2\text{)}$$

soit

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \rho(\tau_i^j) \right| < \frac{1}{n} \left[\frac{2\mu \, (2\varepsilon' \, j + T(\varepsilon))}{\mu^2 - \varepsilon'^2} + 2 \right] + \varepsilon$$

Remarquant que $\frac{1}{n^2} \sum_{j=B(\varepsilon, \varepsilon')+1}^{n} j \leq \frac{1}{2}$, il vient alors

$$\left| \frac{1}{n^2} \sum_{j=B(\varepsilon, \varepsilon')+1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \rho(t_i - t_j) \right| < \frac{2\mu\varepsilon'}{\mu^2 - \varepsilon'^2} + \frac{1}{n} \left[\frac{2\mu \, T(\varepsilon)}{\mu^2 - \varepsilon'^2} + 2 \right] + \varepsilon$$

quantité que l'on peut prendre inférieure à 2ε en jouant sur ε' et n.

Reste alors à majorer $\left| \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^{B(\varepsilon,\varepsilon')} \sum_{i=1}^{n} \rho(t_i - t_j) \right|$, ce qui ne présente aucune difficulté.

3-2-1 Le théorème II reste vrai pour toute convergence au sens de Césaro d'ordre supérieur à zéro, c'est-à-dire pour des suites $\{t_i\}$ telles que $\lim_{n\to\infty} \frac{t_n}{n^\alpha} = \mu > 0$, $\alpha > 0$. La démonstration est semblable à la précédente à un développement limité près. On trouve dans ce cas, en négligeant les termes non significatifs en j, et en posant $(\frac{\mu+\varepsilon'}{\mu-\varepsilon'})^{1/\alpha} = \lambda$

$$k_2-k_1 = j\left[\lambda - \frac{1}{\lambda}\right] + \frac{j^{1-\alpha}}{\alpha}\left[\lambda^{1-\alpha}\left(\frac{T(\varepsilon)}{\mu-\varepsilon'} + \beta(j)\right) + \lambda^{\alpha-1}\left(\frac{T(\varepsilon)}{\mu+\varepsilon'} + \alpha(j)\right) + \varepsilon\left(\frac{1}{j^\alpha}\right)\right]$$

soit

$$\left|\frac{1}{n^2}\sum_{j=B(\varepsilon,\varepsilon')+1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\rho(t_i - t_j)\right| \leq \frac{\lambda^2-1}{2} + \gamma\sum_{j=1}^{n}\frac{j^{1-\alpha}}{n^2}$$

le premier terme du second membre tend vers zéro avec ε' .

D'autre part, pour $\alpha \in [0,1[$, $\sum_{j=1}^{n}\frac{j^{1-\alpha}}{n^2}$ se comporte comme $\frac{1}{(2-\alpha)n^\alpha}$ qui tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Pour $\alpha > 1$, la suite $\{j^{1-\alpha}\}$ tend vers zéro avec $\frac{1}{j}$, donc converge aussi vers zéro au sens de Césaro d'ordre supérieur ou égal à 1. Ceci entraine la propriété.

3-2-2 Si f(n) est seulement une fonction croissante non bornée telle que $\lim_{n\to\infty} \frac{t_n}{f(n)} = \mu > 0$, il est illusoire de vouloir prolonger le théorème II sans faire d'hypothèses supplémentaires sur $\rho(\tau)$.

En effet, prenons par exemple la fonction suivante :

$f(n) = t_n = \log n$ et $\rho(\tau) = e^{-|\tau|}$ (fonction d'autocorrélation d'un signal des télégraphistes). Il vient alors :

$$\frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^{n} \rho(t_i - t_j) = \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} \sum_{i=2}^{n} \left(\frac{1}{i} \sum_{j=1}^{i-1} j\right) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \sum_{i=2}^{n} \frac{(i-1)(i-2)}{i}$$

donc $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^{n} \rho(t_i - t_j) = \frac{1}{2} \quad .$$

On améliore cependant le théorème II par le théorème III.

4- 4-1 Théorème III

H 1) $\lim_{\tau\to\infty} \rho(\tau) = 0$ $\qquad \rho(0) = 1 \qquad (H_1)$

2) $\exists$ $f(x)$ fonction continue et dérivable, a, b, α, μ, réels positifs tels que

$$\frac{f(x)}{f'(x)} < ax \quad , \quad f'(x) > b\, x^{\alpha-1}$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \frac{t_n}{f(n)} = \mu \qquad (H_2)$$

C $\qquad \mathrm{Var}\ \hat{m}_\infty = 0$

la démonstration suit la même voie que celle du théorème II .

D'après H_1 : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ $T(\varepsilon)$ tel que $\tau > T(\varepsilon) \Rightarrow |\rho(\tau)| < \varepsilon$

D'après H_2 : $\forall \varepsilon' > 0$, $\exists A(\varepsilon')$ tel que $n > A(\varepsilon') \Rightarrow \left| \frac{t_n}{f(n)} - \mu \right| < \varepsilon'$

Si $p > q > A(\varepsilon')$, on cherche à quelles conditions $t_p - t_q > T(\varepsilon)$:

$$f(p)\ (\mu-\varepsilon') < t_p < f(p)\ (\mu+\varepsilon')$$

$$f(q)\ (\mu-\varepsilon') < t_q < f(q)\ (\mu+\varepsilon')$$

d'où

$$t_p - t_q > f(p)\ (\mu-\varepsilon') - f(q)\ (\mu+\varepsilon') > T(\varepsilon)$$

soit

$$f(p) - f(q) > \frac{T(\varepsilon)}{\mu-\varepsilon'} + 2f(q)\ \frac{\varepsilon'}{\mu-\varepsilon'} \qquad (3)$$

$$f(p) - f(q) > \frac{T(\varepsilon)}{\mu+\varepsilon'} + 2f(p)\ \frac{\varepsilon'}{\mu+\varepsilon'} \qquad (4)$$

Les termes τ_i^j susceptibles d'être tels que $|\rho(\tau_i^j)| > \varepsilon$, sont groupés autour de 0, soit $\tau^j_{k_1}+1 \cdots\cdots 0 \cdots\cdots \tau^j_{k_2}-1$, avec $k_1(j)$ et $k_2(j)$. On cherche $k_1(j)$ et $k_2(j)$ de façon à avoir $|\rho(\tau^j_{k'_1})|$ et $|\rho(\tau^j_{k'_2})| < \varepsilon$, avec $k'_1 \leq k_1$ et $k'_2 \geq k_2$

D'après (3) et (4) :

$$f(j) - f(k_1) > \frac{T(\varepsilon)}{\mu+\varepsilon'} + 2f(j)\ \frac{\varepsilon'}{\mu+\varepsilon'}$$

$$f(k_2) - f(j) > \frac{T(\varepsilon)}{\mu-\varepsilon'} + 2f(j)\ \frac{\varepsilon'}{\mu-\varepsilon'}$$

soit :

$$f\left[k_1 + \beta_1\right] = f(j)\ \frac{\mu-\varepsilon'}{\mu+\varepsilon'} - \frac{T(\varepsilon)}{\mu+\varepsilon'} \qquad (5) \qquad \text{ou } k_1 = 0$$

$$f\left[k_2 - \beta_2\right] = f(j)\ \frac{\mu+\varepsilon'}{\mu-\varepsilon'} + \frac{T(\varepsilon)}{\mu-\varepsilon'} \qquad (6) \qquad \text{ou } k_2 = n$$

avec $\beta_1(j)$ et $\beta_2(j)$ tels que β_1 et $\beta_2 \in [0,1]$, $\forall\ j$.

D'où k_1 et k_2 en fonction de j, avec la condition supplémentaire

$k_1 > A(\varepsilon')$ soit $f^{-1}\left[f(j)\ \frac{\mu-\varepsilon'}{\mu+\varepsilon'} - \frac{T(\varepsilon)}{\mu+\varepsilon'}\right] - \beta_1(j) > A(\varepsilon')$ puisque

f est croissante, ou encore $f(j)\ \frac{\mu-\varepsilon'}{\mu+\varepsilon'} - \frac{T(\varepsilon)}{\mu+\varepsilon'} > f\left[A(\varepsilon') + 1\right]$.

Cette dernière inégalité détermine l'indice j minimum pour lequel les expressions (3), (4), (5), (6) sont valables, soit $j_0 = B(\varepsilon,\varepsilon') + 1$.

On écrit alors, dès que $j \geq j_0$:

$$\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \rho(\tau_i^j)\right| < \frac{k_2 - k_1}{n} + \varepsilon$$

Reste à majorer de manière suffisamment précise $k_2 - k_1$, en vue d'une sommation sur l'indice j. f(x) étant continue et dérivable, il vient , d'après le théorème des accroissements finis :

$$f\left[k_2 - \beta_2\right] - f\left[k_1 + \beta_1\right] = \left(k_2 - k_1 - \beta_1 - \beta_2\right) f'(x_j)$$

avec $x_j \in \left[k_1 + \beta_1\ ,\ k_2 - \beta_2\right]$

D'où, utilisant (5) et (6) :

$$k_2 - k_1 = \beta_1 + \beta_2 + \frac{f(j)}{f'(x_j)} \quad \frac{4\mu\varepsilon'}{\mu^2 - \varepsilon'^2} + \frac{2\mu\, T(\varepsilon)}{\mu^2 - \varepsilon'^2} \quad \frac{1}{f'(x_j)} \qquad (7)$$

Remplaçant, dans (7), f(j) par sa valeur en fonction de k_1 , donnée par (5) :

$$k_2 - k_1 = \beta_1 + \beta_2 + \frac{f[k_1 + \beta_1]}{f'(x_j)} \quad \frac{4\mu\,\varepsilon'}{(\mu-\varepsilon')^2} + \frac{1}{f'(x_j)} \quad \frac{2\mu\, T(\varepsilon)}{(\mu-\varepsilon')^2}$$

D'où, f(x) étant croissante et $\beta_1 + \beta_2$ majoré par 2 :

$$k_2 - k_1 \leq 2 + \frac{f(x_j)}{f'(x_j)} \quad \frac{4\mu\,\varepsilon'}{(\mu-\varepsilon')^2} + \frac{1}{f'(x_j)} \quad \frac{2\mu\, T(\varepsilon)}{(\mu-\varepsilon')^2}$$

On utilise alors les hypothèses $\frac{f(x)}{f'(x)} < ax$ et $f'(x) > b\, x^{\alpha-1}$

$$k_2 - k_1 \leq 2 + \frac{4\mu a\,\varepsilon'}{(\mu-\varepsilon')^2}\, x_j + \frac{2\mu\, T(\varepsilon)}{b(\mu-\varepsilon')^2}\, x_j^{1-\alpha}$$

Comme $x_j \leq k_2 - \beta_2 \leq n$, et $\alpha > 0$:

$$\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \rho(\tau_i^j)\right| < \frac{2}{n} + \frac{4\mu\, a}{(\mu-\varepsilon')^2}\,\varepsilon' + \frac{2\mu\, T(\varepsilon)}{b(\mu-\varepsilon')^2} \quad \frac{1}{n} \quad \text{si } \alpha \geq 1$$

$$\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \rho(\tau_i^j)\right| < \frac{2}{n} + \frac{4\mu\, a}{(\mu-\varepsilon')^2}\,\varepsilon' + \frac{2\mu\, T(\varepsilon)}{b(\mu-\varepsilon')^2} \quad \frac{1}{n^{\alpha}} \quad \text{si } \alpha < 1$$

Dans les deux cas, les premier et troisième termes du second membre tendent vers 0 avec $1/n$, et le second est majoré quel que soit j, et aussi petit que l'on veut, proportionnellement à ε' .

Il s'ensuit que $\frac{1}{n^2} \sum_{j=B(\varepsilon,\varepsilon')+1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \rho(t_i - t_j)$

peut être pris aussi petit que l'on veut en faisant décroître ε et ε' .

Quant à l'expression $\frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^{B(\varepsilon,\varepsilon')} \sum_{i=1}^{n} \rho(t_i - t_j)$, elle est majorée

par $\frac{B(\varepsilon,\varepsilon')}{n}$, terme rendu aussi petit que l'on veut en faisant croître n . D'où le théorème

4- 2 Remarque :

Les théorèmes I, II, et III montrent que la suite d'échantillonnage $\{t_i\}$ doit croître suffisamment vite si l'on désire que l'estimateur $\hat{m}_n$ soit convergent. On pourrait donc penser que la condition

$\lim_{n\to\infty} \frac{t_n}{f(n)} = \mu$ est trop forte, et pourrait être remplacée par

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{t_n}{f(n)} = \mu \neq 0$$

Les contre-exemples suivants montrent que dans une certaine mesure cette assertion est erronée.

4-2-1 Considérons la suite t_i suivante :

$$1,\ 2,\ 2 + 1/2\ ,\ 2^2\ ,\ 2^2 + \frac{1}{2^2}\ ,\ 2^2 + \frac{2}{2^2}\ ,\ 2^2 + \frac{3}{2^2}\ ,\ 2^3, \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ 2^n,\ 2^n + \frac{1}{2^n}\ ,\ 2^n + \frac{2}{2^n}, \ldots\ 2^n + \frac{2^n - 1}{2^n}$$

On voit que $t_{2^{n+1} - 1} = 2^n + \frac{2^n - 1}{2^n}$

$$t_{2^{n+1}} = 2^{n+1}$$

d'où, avec $f(n) = n$, $1/2 < \frac{t_n}{f(n)} < 1$

et $\underline{\lim}\ \frac{t_n}{f(n)} = \frac{1}{2}$, $\overline{\lim}\ \frac{t_n}{f(n)} = 1$, $\underline{\lim} \neq \overline{\lim}$.

Considérons $\rho(\tau)$ tel que $\rho(1) > 0$ et $\rho(\tau)$ décroissante sur R_+ (donc non négative) .

$$\text{Formons } A(n) = \frac{1}{2^{2n+2}} \sum_{i,j=1}^{2^{n+1}} \rho(t_i - t_j)$$

Il vient: $A(n) > \frac{1}{2^{2n+2}} \sum_{i,j=2^n}^{2^{n+1}} \rho(t_i - t_j) > \frac{1}{2^{2n+2}} \times (2^{n+1} - 2^n)^2\ \rho(1)$

et $A(n) > \frac{1}{4}\ \rho(1)$.

Cet exemple rend plus clair le fait que, si la croissance de la suite $\{t_i\}$ a une grande importance, c'est l'écart "moyen" entre les t_i , qui rend compte de la convergence ou de la divergence de l'estimateur.

Notons enfin que le contre-exemple précédent reste valable pour toute fonction d'autocorrélation $\rho(\tau)$ simplement assujettie à être telle que $\rho(\tau)$ tend vers 0 avec $1/\tau$.

4-2-2- Considérons maintenant la suite $\{t_i\}$ suivante :

$2^2, 2^4, 2^4+1, 2^6, 2^6+1, 2^6+2, 2^6+3, 2^8, 2^8+1, \ldots\ldots, 2^8+7, \ldots$

$2^{2n}, 2^{2n}+1, 2^{2n}+2, 2^{2n}+3, \ldots\ldots, 2^{2n} + 2^{n-1} - 1, 2^{2n+2}, \ldots\ldots$

Alors $t_{2^n-1} = 2^{2n} + 2^{n-1} - 1$ $\qquad \lim_{n\to\infty} \dfrac{t_{2^n-1}}{(2^n-1)^2} = 1$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{t_{2^n}}{(2^n)^2} = 4$$

Si $f(n) = n^2$, on a donc

$$\underline{\lim} \frac{t_n}{f(n)} = 1 \qquad \text{et} \qquad \overline{\lim} \frac{t_n}{f(n)} = 4$$

Supposons de plus que $\lim_{\tau\to\infty} \rho(\tau) = 0$ et $\rho(0) = 1$

Alors $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, A(\varepsilon)$ tel que $|\tau| > A(\varepsilon) \Longrightarrow |\rho(\tau)| < \varepsilon$

Si $\tau_i^j = t_i - t_j$, la définition de la suite $\{t_i\}$ fait que

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \rho(\tau_i^j) \right| < \frac{2A(\varepsilon)+1}{n} + \varepsilon \,, \quad \forall\ j$$

d' où

$$\left| \frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^{n} \rho(t_i - t_j) \right| < \frac{2A(\varepsilon)+1}{n} + \varepsilon$$, quantité qui peut être

prise aussi petite que l'on veut .

Cet exemple renforce la conclusion du § 4-2-1 : le fait que $\underline{\lim} \frac{t_n}{f(n)} \neq \overline{\lim} \frac{t_n}{f(n)}$ n'entraîne pas obligatoirement la divergence de l'estimateur $\hat{m}_n$. Remarquons que ceci peut être directement déduit du théorème I , puisque $t_{i+1} - t_i \geq 1$, $\forall$ i .

5 - Conclusion

Un bruit physique qui trouve son origine dans la structure même de la matière (bruit thermique, bruit de grenaille, de scintillation, ...) est en général considéré comme un processus de Khintchine, obéissant à la condition $\lim_{\tau \to \infty} \rho(\tau) = 0$. D'autre part un échantillonnage physique est en général défini par les hypothèses des théorèmes I et II. D'où leur utilité pratique . Le théorème III , plus élaboré du point de vue théorique, génère le théorème II .

Une étude théorique plus poussée tenant compte de structures plus fines de la suite d'échantillonnage $\{t_i\}$ et appliquée à des classes moins générales de processus, semble possible. Les exemples du § 4-2 , à ce point de vue, sont éloquents .

C H A P I T R E - III -

CONVERGENCE DE $\hat{m}_n$ LORSQUE

$\rho(\tau)$ EST PRESQUE PERIODIQUE

$\ell(x)$ EST CONTINUE

1- Introduction

Soit $X(t)$, un processus tel que $\rho(\tau) = \rho_2(\tau)$. Si $\rho_2(\tau)$ est périodique de période T, la convergence vers zéro de Var $\hat{m}_n$ dépend uniquement des propriétés modulo T de la suite $\{t_i\}$. De la même façon, si $\rho(\tau)$ est une combinaison linéaire de termes périodiques de périodes T_1 , T_2,....., Var $\hat{m}_\infty$ dépendra des propriétés modulo T_1, T_2 ... . de $\{t_i\}$. Plus précisément, connaissant les propriétés modulo T de $\{t_i\}$, il nous faudra déterminer celles d'une des suites $\{t_i - t_j\}$ $(i,j) \in N \times N$ puisque Var $\hat{m}_n = \frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^{n} \rho(t_i - t_j)$.

2- Etude de la suite $\{\alpha_i - \alpha_j\}$ $(i,j) \in N \times N$

2-1 Définitions

2-1-1 Soit la suite $\{\alpha_i\}$ telle que $\alpha_i \in [0,1[$, $\forall i$. On note $F(n,x)$ le nombre des (α_i) , $i \leq n$, tels que $\alpha_i \in [0,x[$. On suppose que

1) $\ell(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{F(n,x)}{n}$ existe $\forall$ x

2) $\ell(x)$ est continue et continuement différentiable par morceaux . La continuité de $\ell(x)$ entraîne la propriété suivante :

2-1-2 Théorème IV $\frac{F(n,x)}{n}$ converge uniformément vers $\ell(x)$ sur R.

Par hypothèse, $\ell(x)$ est continue sur $[0,1]$, donc uniformément continue sur ce segment :

$$\forall \varepsilon > 0 , \quad \exists \ \eta(\varepsilon) \text{ tel que } |x - x_0| < \eta \Rightarrow |\ell(x) - \ell(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (1)$$

$\forall x \in [0,1]$

D'autre part, $\frac{F(n,x)}{n}$ converge vers $\ell(x)$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_1(\varepsilon,x_1) \text{ tel que } n > N_1 \Rightarrow \left|\frac{F(n,x_1)}{n} - \ell(x_1)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_2(\varepsilon,x_2) \text{ tel que } n > N_2 \Rightarrow \left|\frac{F(n,x_2)}{n} - \ell(x_2)\right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (2)$$

Si $|x_2 - x_1| < \eta(\varepsilon)$ et $X \in [x_1,x_2]$: $|\ell(X) - \ell(x_1)| < \frac{\varepsilon}{2}$

$$|\ell(X) - \ell(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

d'après (1)

D'autre part $F(n,x)$ est une fonction non décroissante de x, d'où

$$F(n,x_1) \leq F(n,X) \leq F(n,x_2)$$

Il s'ensuit, puisque $\frac{F(n,x_1)}{n} > \ell(x_1) - \frac{\varepsilon}{2}$ pour $n > N_1$

$$\frac{F(n,x_2)}{n} < \ell(x_2) + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pour } n > N_2$$

$$\ell(x_1) - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{F(n,X)}{n} < \ell(x_2) + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pour } n > \sup(N_1,N_2)$$

Mais $\ell(X) < \ell(x_1) + \frac{\varepsilon}{2}$ et $\ell(X) > \ell(x_2) - \frac{\varepsilon}{2}$

D'où $$\ell(X) - \varepsilon < \frac{F(n,X)}{n} < \ell(X) + \varepsilon \qquad (3)$$

dès que les conditions suivantes sont remplies :

$$n > \sup (N_1, N_2)$$

$$X \in [x_1, x_2]$$

$$|x_2 - x_1| < n(\varepsilon)$$

$$N_1(x_1, \varepsilon) \text{ et } N_2(x_2, \varepsilon)$$

Divisons maintenant $[0,1]$ en $m(\varepsilon)$ intervalles

$[0, y_1]$, $[y_1, y_2]$ ..... $[y_{m-1}, 1]$, $(y_0 = 0, y_m = 1)$ tels que

$(y_{i+1} - y_i) < n(\varepsilon)$, $\forall$ $i = 0 \ldots\ldots m - 1$.

A chaque y_i , correspond $N_i(\varepsilon)$ tel que pour $n > N_i(\varepsilon)$, $\left| \frac{F(n, y_i)}{n} - \ell(y_i) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$

Soit $N'(\varepsilon) = \sup_{i = 0 \ldots m-1} N_i(\varepsilon)$; alors , d'après (3) , et $\forall$ $X \in [0,1]$:

$$\forall \varepsilon > 0 \; , \exists N'(\varepsilon) \text{ tel que } n > N'(\varepsilon) \Rightarrow \left| \frac{F(n,X)}{n} - \ell(X) \right| < \varepsilon \; , \forall X \in [0,1]$$

la propriété s'étend de manière évidente à l'extérieur de $[0,1]$.

Le théorème IV est ainsi démontré .

2-1-3 L'étude de la suite $\{\alpha_i - \alpha_j\}$ $(i,j) \in N \times N$ passe d'abord par sa définition, qui revient à ordonner les termes $(\alpha_i - \alpha_j)$ par le tableau suivant , parcouru ligne à ligne, de gauche à droite :

$$\alpha_1 - \alpha_1$$

$$\alpha_2 - \alpha_1 \, , \, -(\alpha_2 - \alpha_1) \, , \, \alpha_2 - \alpha_2$$

$$\alpha_3 - \alpha_1 \, , \, -(\alpha_3 - \alpha_1) \, , \, \alpha_3 - \alpha_2 \, , \, -(\alpha_3 - \alpha_2) \, , \, \alpha_3 - \alpha_3$$

$$\vdots$$

$$\alpha_n - \alpha_1 \, , \, -(\alpha_n - \alpha_1) \, , \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \, \alpha_n - \alpha_{n-1} \, , \, -(\alpha_n - \alpha_{n-1}) \, , \, \alpha_n - \alpha_n$$

On note $F_\alpha(n,x)$ et $\ell_\alpha(x)$ les caractéristiques de cette nouvelle suite. Nous énonçons maintenant le théorème V , dont la longue démonstration s'étend sur les § 2-2-1 , 2-2-2 . Ce théorème explicite $\ell_\alpha(x)$ en fonction de $\ell(x)$, caractéristique de la suite $\{\alpha_i\}$. Son application directe, dans le § 3 , donnera les conditions de convergence de la moyenne dans le cas d'un processus à fonction d'autocorrélation sinusoïdale, périodique et, enfin, presque périodique.

2-2 Théorème V

H $\ell(x)$ existe $\forall$ x , est continue, et continuement différentiable par morceaux .

C $$\ell_\alpha(x) = \int_0^1 \ell\left[(x+u)_{\text{mod } 1}\right] \, d\ell(u) + \frac{1}{2} - \ell(1-x) \qquad \forall x \in [0,1]$$

Le principe de la démonstration est le suivant : la suite $\{\alpha_i - \alpha_j\}_{i,j \in N\times N}$ est la réunion des suites $\{\alpha_i - \alpha_j\}_{i \in N}$, j , paramètre décrivant N. Le calcul de $\ell_\alpha(x)$ passe par celui des caractéristiques des suites du

type $\{\alpha_i - y\}_{i \in N}$ (§ 2-2-1) . La réunion de telles suites parachèvera la démonstration (§ 2-2-2) .

2-2-1 Etude de la suite $\{\alpha_i - y\}$

Soit $y \in [0,1[$, $F_y(n,x)$ et $\ell_y(x)$ les caractéristiques modulo 1 de la suite $\{\alpha_i - y\}$.

Dans l'étude de $F_y(n,x)$, deux cas doivent être considérés :

a) $\alpha_i - y \geq 0 \implies (\alpha_i - y) \bmod 1 = \alpha_i - y$

et $(\alpha_i - y) \bmod 1 < x \iff \alpha_i < x + y$

b) $\alpha_i - y < 0 \implies (\alpha_i - y) \bmod 1 = \alpha_i - y + 1$

et $(\alpha_i - y) \bmod 1 < x \iff \alpha_i < x + y - 1$

d'où $(\alpha_i - y) \bmod 1 < x$

$$\iff \begin{cases} \alpha_i \geq y \text{ et } \alpha_i < x + y \\ \text{ou} \\ \alpha_i < y \text{ et } \alpha_i < x + y - 1 \end{cases}$$

et
$$\begin{cases} F_y(n,x) = F(n,x+y) - F(n,y) & \text{si } x + y \leq 1 \\ F_y(n,x) = F(n,x+y-1) + n - F(n,y) & \text{si } x + y > 1 \end{cases} \qquad (4)$$

$\forall\ x \in [0,1]$

Divisant par n et passant à la limite

$$\begin{cases} \ell_y(x) = \ell(x+y) - \ell(y) & \text{si } x + y \leq 1 \\ \ell_y(x) = \ell(x+y-1) + 1 - \ell(y) & \text{si } x + y > 1 \end{cases} \qquad (5)$$

$\forall\ x \in [0,1]$

On retrouve pour la suite $\{\alpha_i - y\}$ les trois propriétés qui définissent $\{\alpha_i\}$, à savoir 1) l'existence de $\ell_y(x)$, $\forall\ x \in [0,1]$, les conditions aux limites $\ell_y(0) = 0$, $\ell_y(1) = 1$

2) la continuité de $\ell_y(x)$

3) la convergence uniforme de $\frac{F_y(n,x)}{n}$ vers $\ell_y(x)$, par rapport à x.

On a de plus, la propriété suivante :

4) $\frac{F_y(n,x)}{n}$ converge uniformément vers $\ell_y(x)$ sur l'ensemble $y \in [0,1[$, à x fixé. Ceci découle directement de l'expression (4) et de la convergence de $\frac{F(n,y)}{n}$ vers $\ell(y)$.

2-2-2. Propriétés de la suite $\{\alpha_j - \alpha_i\}$ $(i,j) \in N \times N$

On note $F_i(n,x)$ et $\ell_i(x)$ les caractéristiques modulo 1 de la suite $\{\alpha_j - \alpha_i\}_{j \in N}$ (c'est-à-dire i fixé). On peut écrire

$$F_\alpha(n^2,x) = \sum_{i=1}^{n} F_i(n,x)$$

et $$\Lambda_{n^2}(x) = \frac{F_\alpha(n^2,x)}{n^2} = \frac{1}{n}\left[\sum_{i \in I_n} \frac{F_i(n,x)}{n} + \sum_{i \in J_n} \frac{F_i(n,x)}{n}\right]$$

I_n et J_n étant les ensembles d'indices $i \leqslant n$ tels que respectivement $\alpha_i \leqslant 1 - x$ et $\alpha_i > 1 - x$.

D'après le § 2-2-1

$$i \in I_n \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{F_i(n,x)}{n} = \ell(x + \alpha_i) - \ell(\alpha_i)$$

$$i \in J_n \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{F_i(n,x)}{n} = \ell(x + \alpha_i - 1) + 1 - \ell(\alpha_i)$$

$$\text{et } \Lambda_n 2(x) = \frac{1}{n}\left[\sum_{i \in I_n} \{\ell(x+\alpha_i)-\ell(\alpha_i)\} + \sum_{i \in J_n} \{\ell(x+\alpha_i-1)+1-\ell(\alpha_i)\} + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i(n,x)\right] \tag{6}$$

avec $\varepsilon_i(n,x) = \ell_i(x) - \frac{F_i(n,x)}{n}$

De la propriété 4 du § 2-2-1, on tire :

$\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ N_1(\varepsilon,x)$ tel que $n > N_1(\varepsilon,x) \Longrightarrow |\varepsilon_i(n,x)| < \varepsilon$, $\forall\ i \in \mathbb{N}$

ce qui entraîne $\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i(n,x)\right| < \varepsilon$, dès que $n > N_1(\varepsilon,x)$.

Posons maintenant $\phi(n,x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i(n,x)$

$$- \{\alpha_i\}_{i \in I_n} \equiv \{\beta_p\}_{p=1,2,\ldots\ldots p_n}$$

$$- \{\alpha_i\}_{i \in J_n} \equiv \{\gamma_q\}_{q=1,2,\ldots\ldots q_n}$$

p_n et q_n représentent les nombres d'éléments de la suite $\{\alpha_i\}_{i \leq n}$

appartenant respectivement à $[0,1-x]$ et $]1-x,1[$. Il s'ensuit que $\frac{p_n}{n}$ et $\frac{q_n}{n}$ convergent vers $\ell(1-x)$ et $1-\ell(1-x)$ de par la continuité de $\ell(x)$. Nous supposons, dans un premier temps $\ell(1-x)$ différent de 0 et 1, et donc x différent de 0 et 1 . Les caractéristiques modulo 1 $F_\beta(n,u)$, $F_\gamma(n,u)$, $\ell_\beta(u)$, $\ell_\gamma(u)$ des suites $\{\beta_i\}$ et $\{\gamma_i\}$ dépendent évidemment de x de par leur construction ; étant donné que nous travaillons à x constant, il n'est pas utile de faire apparaître cette variable qui compliquerait trop les notations .

La suite $\{\beta_i\}$ est obtenue par filtrage de la suite $\{\alpha_i\}$ sur $[0,1-x]$, $x \neq 1$. (Voir chapitre VI § 3-1)

Si $u \in [0,1-x]$, on peut écrire

$$F_\beta(p_n,u) = F(n,u)$$

d' où
$$\ell_\beta(u) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{p_n} \cdot \frac{F(n,u)}{n} = \frac{\ell(u)}{\ell(1-x)} \qquad \text{pour } u \in [0,1-x] \tag{7}$$

$$\ell_\beta(u) = 1 \qquad \text{pour } u \in]1-x,1[$$

De même, la suite $\{\gamma_i\}$ est due au filtrage de la suite $\{\alpha_i\}$ sur $]1-x,1[$, $x \neq 0$

d' où
$$\ell_\gamma(u) = 0 \qquad \text{pour } u \in [0,1-x]$$

$$\ell_\gamma(u) = \frac{\ell(u) - \ell(1-x)}{1-\ell(1-x)} \qquad \text{pour } u \in]1-x,1[\tag{8}$$

Remarquons que $\ell_\beta(u)$ et $\ell_\gamma(u)$ sont continues et dérivables de la même manière que $\ell(x)$.

D'autre part, il est bien connu que, étant donné $f(x)$ suffisamment régulière sur $[0,1]$, (en particulier continue) , et une suite $\{\theta_i\}$ de caractéristique $\ell_\theta(x)$ continue , à dérivée définie , sauf éventuellement sur un ensemble fini de points , on peut écrire :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(\theta_i) = \int_0^1 f(x)\ d\ell_\theta(x)$$

Il découle de cette propriété les limites suivantes :

$$\lim_{p_n\to\infty} \sum_{i=1}^{p_n} \frac{\ell(x+\beta_i)}{p_n} = \int_0^{1-x} \ell(x+u)\ d\ell_\beta(u) \qquad \text{puisque } \frac{d\ell_\beta(u)}{du} = 0 \text{ sur }]1-x,1[$$

$$\lim_{q_n\to\infty} \sum_{i=1}^{q_n} \frac{\ell(x+\gamma_i-1)}{q_n} = \int_{1-x}^{1} \ell(x+u-1)\ d\ell_\gamma(u) \quad \text{puisque } \frac{d\ell_\gamma(u)}{du} = 0 \text{ sur } [0,1-x[$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{\ell(\alpha_i)}{n} = \int_0^1 \ell(u)\ d\ell(u) = \frac{1}{2}$$

Tenant alors compte des formules (6) , (7) , (8) , des limites de $\frac{p_n}{n}$, $\frac{q_n}{n}$ et $\phi(n,x)$, il vient :

$$\lim_{n\to\infty} \Lambda_{n^2}(x) = \int_0^{1-x} \ell(x+u)d\ell(u) + \int_{1-x}^{1} \ell(x+u-1)d\ell(u) + \frac{1}{2} - \ell(1-x), \quad \forall\, x \in [0,1]$$

Etant donné que $F_\alpha(n,x)$ est une fonction non décroissante de n, il s'ensuit que $\ell_\alpha(x) = \lim_{n\to\infty} \Lambda_{n^2}(x)$ d'où

$$\ell_\alpha(x) = \int_0^1 \ell\left[(x+u)_{\text{mod } 1}\right] \, d\ell(u) + \frac{1}{2} - \ell(1-x), \quad \forall x \in [0,1] \qquad (9)$$

En effet, les cas $x = 0$ et $x = 1$ ne présentent aucune difficulté supplémentaire et amènent la même expression de $\Lambda_{n^2}(x)$.

Le théorème V est ainsi démontré .

2-3 Remarques

2-3-1 Théorème VI

$\ell_\alpha(x)$ possède les mêmes propriétés de continuité et de dérivabilité que $\ell(x)$. Montrons tout d'abord la continuité .

D'après (9) , si $x_0 < x$:

$$\ell_\alpha(x) - \ell_\alpha(x_0) = \int_0^{1-x} \left[\ell(x+u) - \ell(x_0+u)\right] \, d\ell(u) + \int_{1-x_0}^{1} \left[\ell(x+u-1) - \ell(x_0+u-1)\right] d\ell(u)$$

$$+ \int_{1-x}^{1-x_0} \left[\ell(x+u-1) - \ell(x_0+u)\right] d\ell(u) + \ell(1-x_0) - \ell(1-x)$$

Du fait de la continuité de $\ell(x)$, fonction non décroissante, on peut majorer les premier , deuxième termes du second membre de l'égalité précédente, ainsi que la différence des deux derniers termes. Reste à majorer

$\left| \int_{1-x}^{1-x_0} [\ell(x+u-1) - \ell(x_0+u)] \, d\ell\,(u) \right|$, terme inférieur à $x - x_0$ puisque la variation totale de $\ell_\alpha(x)$ est égale à 1 .

Démontrons maintenant que $\ell_\alpha(x)$ est dérivable sauf peut-être sur un ensemble fini de points . Nous nous plaçons dans le cas où $\frac{d\ell(x)}{dx}$ est discontinue en un seul point μ . $\frac{d\ell}{dx}\,[(x+u)_{\text{mod } 1}]$ est alors discontinue sur les segments de droites $x+u=\mu$ et $x+u=\mu+1$ situés dans le carré $(x,u) \in [0,1] \times [0,1]$ du plan (x,u) . Pour simplifier, adoptons la disposition de la figure (1) , qui isole les points délicats .

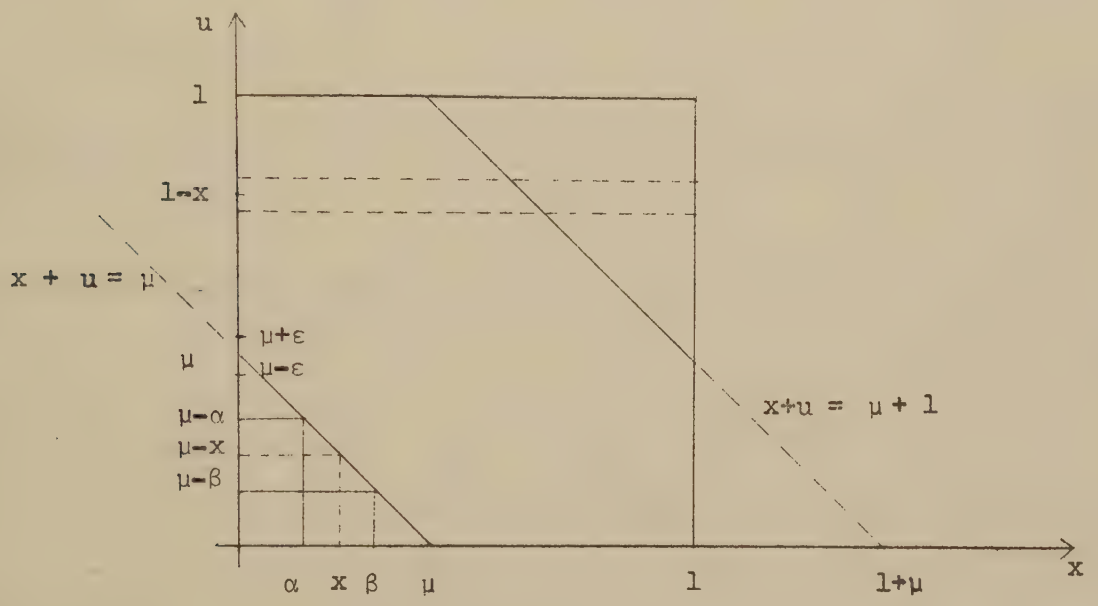

fig. 1

On écrit d'après (9) :

$$\ell_\alpha(x) = \int_0^{\mu-\beta} + \int_{\mu-\beta}^{\mu-\alpha} + \int_{\mu-\alpha}^{\mu-\varepsilon} + \int_{\mu-\varepsilon}^{\mu+\varepsilon} + \int_{\mu+\varepsilon}^{1-x-\varepsilon} + \int_{1-x-\varepsilon}^{1-x+\varepsilon} + \int_{1-x+\varepsilon}^{1} \ell\left[(x+u)_{\text{mod}1}\right] d\ell(u) + \frac{1}{2} - \ell(1-x)$$

$$\ell_\alpha(x) = \sum_{i=1}^{7} I_i + \frac{1}{2} - \ell(1-x)$$

Sur l'ensemble $(x,u) \in [\alpha,\beta] \times \{[0,\mu-\beta] \cup [\mu-\alpha,\mu-\varepsilon] \cup [\mu+\varepsilon,1-x-\varepsilon] \cup [1-x+\varepsilon,1]\}$

$\frac{d\ell}{du}$ existe et est continue , $\ell[(x+u)_{\text{modl}}]$ est continue ainsi que sa dérivée, donc, il est possible de dériver sous le signe somme I_1 , I_3 , I_5 et I_7 . D'autre part on a successivement

$\int_{\mu-\beta}^{\mu-\alpha} \frac{\ell(x+u) - \ell(x_0+u)}{x - x_0} \, d\ell(u)$ aussi petit que l'on veut, en faisant tendre $\beta-\alpha$ vers 0

De même :

$$\left| \int_{\mu-\varepsilon}^{\mu+\varepsilon} \frac{\ell(x+u) - \ell(x_0+u)}{x - x_0} \, d\ell(u) \right| < |\ell(\mu+\varepsilon) - \ell(\mu-\varepsilon)| \sup \frac{\ell(x+u) - \ell(x_0+u)}{x - x_0}$$

quantité qui tend vers 0 en même temps que ε , quel que soit x_0 aussi près que l'on veut de x .

Si $x \neq 1 - \mu$, et $x_0 < x$, $\frac{d\ell}{du}$ existe et est continue sur $u \in [1-x, 1-x_0]$ dès que x_0 est suffisamment près de x . Il s'ensuit que

$\int_{1-x}^{1-x_0} [\ell(x+u-1) - \ell(x_0+u)] \, d\ell(u) \# (x - x_0)\left(\frac{d\ell}{du}\right)_{u=1-x}$, puisque $x+u-1$ est très près de 0 et x_0+u de 1 sur tout l'intervalle $u \in [1-x, 1-x_0]$

On majore alors aisément

$\int_{1-x-\varepsilon}^{1-x} \frac{\ell(x+u) - \ell(x_0+u)}{x - x_0} \, d\ell(u)$ et $\int_{1-x_0}^{1-x+\varepsilon} \frac{\ell(x+u-1) - \ell(x_0+u-1)}{x - x_0} \, d\ell(u)$

puisque respectivement $\left(\frac{d\ell}{dy}\right)_{y = x+u}$ et $\left(\frac{d\ell}{dy}\right)_{y=x+u-1}$ existent

dans les intervalles d'intégration.

Il vient donc

$$\frac{d\ell_\alpha}{dx} = \int_0^1 \left(\frac{d\ell}{dy}\right)_{y = (x+u) \bmod 1} d\ell(u) \qquad (10)$$

L'expression (10) est démontrée pour x différent de 0, μ, $1-\mu$, 1. Dans le cas où $\frac{d\ell}{dx}$ comporte k discontinuités $\mu_1, \mu_2 \ldots\ldots \mu_k$, le calcul précédent reste valable aux points x différents de $0, \mu_1 \ldots\ldots \ldots\ldots \mu_k$, $1-\mu_1 \ldots\ldots$, $1-\mu_k$, 1 .

Notons que les discontinuités éventuelles de $\frac{d\ell_\alpha}{dx}$ sont de première espèce . Ceci est dû au fait que $\frac{d\ell}{dx}$ est majorée par une certaine quantité M, ce qui entraîne que $\frac{d\ell_\alpha}{dx}$ est majorée par la même quantité partout où l'égalité (10) est valable , c'est-à-dire aussi près que l'on veut des discontinuités éventuelles de $\frac{d\ell_\alpha}{dx}$

2-3-2 $\ell_\alpha(x)$ est symétrique par rapport au point $\left(x = \frac{1}{2} , \ell_\alpha(x) = \frac{1}{2}\right)$, et $\frac{d\ell_\alpha}{dx}$ est symétrique par rapport à l'axe $x = \frac{1}{2}$. Ceci se déduit de la construction même de la suite $\{\alpha_i - \alpha_j\}_{i, j \in N \times N}$ qui associe à tout élément $(\alpha_i - \alpha_j)_{\bmod 1}$, l'élément $1 - (\alpha_i - \alpha_j)_{\bmod 1} = (\alpha_j - \alpha_i)_{\bmod 1}$. Cette propriété peut aussi se déduire de la formule (10) , à l'aide d'un simple changement de variable.

2-3-3 Un cas particulier intéressant est celui où $\ell(x) = x^n$. On démontre alors que

$$\frac{d\ell_\alpha}{dx} = n^2 \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k C_{n-1}^k B(n,k+1) \left[(1-x)^{n+k} + x^{n+k}\right] \text{ , où } B(p,q)$$

est la fonction eulérienne de première espèce. Pour $n = 1$, on a

$$\ell(x) = \ell_\alpha(x) = x \quad . \qquad (11)$$

C'est grâce à cette propriété qu'un échantillonnage périodique de la moyenne d'un processus stationnaire converge pour presque toutes les valeurs de la fréquence d'échantillonnage.

3- Applications

3-1 Soit la suite $\{t_i\}$ des instants d'échantillonnage. On suppose que cette suite a les mêmes propriétés modulo 1 que la suite $\{\alpha_i\}$

La suite $\{t_i - t_j\}_{(i,j) \in N \times N}$ est construite à partir de $\{t_i\}$ comme la suite $\{\alpha_i - \alpha_j\}_{(i,j) \in N \times N}$ à partir de $\{\alpha_i\}$

Remarquant que $(t_j - t_i)_{\text{mod } 1} = ((t_j)_{\text{mod } 1} - (t_i)_{\text{mod } 1}) \text{ mod } 1$, on est ramené au cas précédent. On applique donc à cette suite les résultats du § 2-2-2 , en prenant comme notations celles employées pour la suite $\{\alpha_i\}$ et les suites qui en découlent.

3-2 $\rho(\tau) = \cos 2\pi\,\tau$

L'échantillonnage du processus $X(t)$ ayant comme fonction d'autocorrélation $\rho(\tau) = \cos 2\pi\,\tau$, sera convergent si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^{n} \rho(t_i - t_j) = 0$$

Comme $\cos 2\pi\,(t_i - t_j) = \cos 2\pi\,[(t_i - t_j) \bmod 1]$, on peut écrire :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^{n} \cos 2\pi\,(t_i - t_j) = \int_0^1 \cos 2\pi\, x\, d\ell_\alpha(x) .$$

L'échantillonnage sera donc convergent si et seulement si

$$\int_0^1 \cos 2\pi\, x\, d\ell_\alpha(x) = 0 \qquad (12)$$

Dans le cas d'un échantillonnage périodique $t_i = i\theta$, $\theta \notin Q$, on démontre que $\ell(x) = x$, $\forall x \in [0,1]$, d'où $\frac{d\ell}{dx} = \frac{d\ell_\alpha}{dx} = 1$ d'après (11) .

D'où $\int_0^1 \cos 2\pi\, y\, d\ell(y) = 0$, et l'échantillonnage est convergent.

Si θ est rationnel, l'échantillonnage ne sera pas en général convergent . En tout cas, il existe un ensemble dénombrable extrait de Q pour lequel il est divergent.

Dans le cas général, la convergence peut s'exprimer de la manière suivante :

3-3 Théorème VII

H 1) $\rho(\tau) = \cos 2\pi\,\tau$

2) $\ell(x)$ est continuement différentiable par morceaux

et $\frac{d\ell}{dx}$ est à variation bornée

C Une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathrm{Var}\ \hat{m}_\infty = 0$ est que le module du fondamental du développement en série de Fourier de $\frac{d\ell}{dx}$ sur $[0,1]$ soit nul .

3-3-1 Si $\frac{d\ell}{dx}$ est continue par morceaux et à variation bornée, il s'ensuit que cette fonction est développable en série de Fourier uniformément convergente par morceaux . (théorème de JORDAN)

Soit $$\frac{d\ell}{dx} = \sum_{k \in N} \sigma_k \cos 2\pi k(x - \phi_k) \qquad (13)$$

avec σ_k tendant vers 0 en même temps que $1/k$.

Reportant (13) dans (10) , et intervertissant les signes de sommation , (opération légitime si x est différent de 0, $\mu_1 \dots \mu_k$, $1-\mu_1 \dots 1-\mu_k$, 1), il vient :

$$\frac{d\ell_\alpha}{dx} = \frac{1}{2} \sum_{k \in N} \sigma_k^2 \cos 2\pi kx + \sigma_0^2 \qquad (14)$$

Si donc $\frac{d\ell}{dx}$ est continue par morceaux et à variation bornée , le deuxième membre de (14) converge uniformément vers une fonction continue , qui est $\frac{d\ell_\alpha}{dx}$, sauf peut être aux points de discontinuités de cette dernière fonction . Ceci est dû au fait que σ_k^2 tend vers 0 au moins comme $\frac{1}{k^2}$.

3-3-2 On remplace dans (12) $\frac{d\ell(x)}{dx}$ par son développement (14). Intervertissant les signes de sommation, on obtient :

$$\int_0^1 \cos 2\pi x \, d\ell_\alpha(x) = \frac{\sigma_1^2}{4}$$

ce qui démontre le théorème VI.

Nous allons maintenant généraliser ces résultats tout d'abord à des processus périodiques de période 1, puis de période quelconque, et enfin, à des processus presque périodiques.

3-4 $\rho(\tau)$ périodique de période 1

Alors $\rho(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \cos 2\pi k\tau$ puisque X(t) est de moyenne nulle, et que $\rho(\tau)$ est une fonction paire. X(t) étant stochastiquement continue, le développement précédent converge uniformément sur [0,1]. Ecrivant $\lim_{n\to\infty} \text{Var } \hat{m}_n = \int_0^1 \rho(x) \, d\ell_\alpha(x)$ et intervertissant les signes somme, sur tous les intervalles où cela est possible, il vient :

$$\int_0^1 \rho(x) \, d\ell_\alpha(x) = \frac{1}{4} \sum_{k \in N} \lambda_k \sigma_k^2$$

d'où la condition nécessaire et suffisante de convergence de l'échantillonnage

$\lambda_k \sigma_k = 0, \forall k$ puisque $\sigma_k \geq 0$ et $\lambda_k \geq 0, \forall k$.

3-5 Processus périodiques de période T quelconque et processus presque périodiques.

Si $\rho(\tau)$ est périodique de période T, on considèrera

les diverses suites $\{t_i\}$, $\{t_i - t_j\}$, ... , non plus modulo 1 ,

mais modulo T. On obtient alors des résultats semblables aux précédents :

$$\text{Var } \hat{m}_\infty = \frac{1}{4} \sum_{k \in N} \lambda_k \sigma^2_{k,T}$$

où - $\dfrac{d\ell_T}{dx} = \sum_{k \in N} \sigma_{k,T} \cos \dfrac{2\pi k}{T} (x - \phi_{k,T})$, $\dfrac{d\ell_T}{dx}$ continue

par morceaux et à variation bornée .

- $\rho(\tau) = \sum_{k \in N} \lambda_k \cos \dfrac{2\pi k}{T} \tau$

Si $\rho(\tau)$ est presque périodique (au sens de BOHR) , de pseudo-périodes T_1 , T_2 ,....., T_n ,....., on obtient

$$\text{Var } \hat{m}_\infty = \frac{1}{4} \sum_{k,i} \lambda_{k,i} \sigma^2_{k,i} \qquad (14)$$

où

- $\dfrac{d\ell_{T_i}}{dx} = \sum_{k \in N} \sigma_{k,i} \cos \dfrac{2\pi k}{T_i} (x - \phi_{k,i})$, $\dfrac{d\ell_{T_i}}{dx}$

continue par morceaux et à variation bornée, $\ell_{T_i}(x)$ étant la fonction de répartition modulo T_i de la suite d'échantillonnage.

- $\rho(\tau) = \sum_{k,i} \lambda_{k,i} \cos \dfrac{2\pi k}{T_i} \tau \qquad (15)$

En effet, la série (15) converge uniformément vers $\rho(\tau)$, $\tau \in R$. Posant

$\rho_i(\tau) = \sum_k \lambda_{k,i} \cos \frac{2\pi k}{T_i} \tau$, on peut écrire

$$\text{Var } \hat{m}_n = \sum_i \text{Var } \hat{m}_n^i \quad \text{avec} \quad \text{Var } \hat{m}_n^i = \frac{1}{n^2} \sum_{j,k=1}^{n} \rho_i(t_j - t_k)$$

d'où $\text{Var } \hat{m}_n^i \leq \sum_k \lambda_{k,i}$ la suite positive des $\text{Var } \hat{m}_n^i$ étant convergente, ceci entraîne que

$$\text{Var } \hat{m}_\infty = \sum_i \lim_{n \to \infty} \text{Var } \hat{m}_n^i$$

D'où le théorème VIII, qui généralise le théorème VI , et induit le cas où $\rho(\tau)$ est périodique :

Théorème VIII

H $\quad \rho(\tau) = \sum_{k,i} \lambda_{k,i} \cos \frac{2\pi k}{T_i} \tau$ continue

$$\frac{d\ell_{T_i}}{dx} = \sum_{k \in N} \sigma_{k,i} \cos \frac{2\pi k}{T_i} (x - \phi_{k,i})$$

continue par morceaux et à variation bornée, $\forall$ i .

C $\quad$ Une condition nécessaire et suffisante pour que $\text{Var } \hat{m}_\infty = 0$ est que

$$\lambda_{k,i} \sigma_{k,i} = 0 , \forall k , \forall i .$$

4- Généralisation 1 : $\frac{d\ell}{dx}$ comporte un nombre fini de points d'accumulation de discontinuités de première espèce

4-1 Position du problème

On a supposé dans les paragraphes précédents que $\frac{d\ell}{dx}$ était continuement différentiable par morceaux et de plus à variation bornée. Il est possible de généraliser les théorèmes précédents dans le cas où $\frac{d\ell}{dx}$ possède un nombre fini de points d'accumulation de discontinuités. Ici, nous nous occupons simplement de discontinuités de première espèce. Pour simplifier les notations , nous faisons les calculs pour une suite infinie de discontinuités μ_1 , μ_2 .... μ_n,.... , qui converge vers μ. Il paraîtra évident, par la marche même du raisonnement , qu'il est possible de généraliser les résultats à un nombre fini de points d'accumulation. Les théorèmes seront rédigés dans ce sens.

4- 2 Décomposition de la suite $\{t_i\}$

Nous décomposons la suite $\{t_i\}$ en deux sous-suites $\{\beta_i^\varepsilon\}$ et $\{\gamma_i^\varepsilon\}$ définies de la manière suivante :

$$t_j \in \{\beta_i^\varepsilon\} \quad \text{si} \quad (t_j)_{\text{mod } 1} \notin [\mu-\varepsilon, \mu+\varepsilon]$$

$$t_j \in \{\gamma_i^\varepsilon\} \quad \text{si} \quad (t_j)_{\text{mod } 1} \in [\mu-\varepsilon, \mu+\varepsilon]$$

Si $\ell_\beta^\varepsilon(x)$ et $\ell_\gamma^\varepsilon(x)$ sont les fonctions de répartition des suites

$\{\beta_i^\varepsilon\}$ et $\{\gamma_i^\varepsilon\}$, il vient immédiatement : (voir chapitre VI)

$$\ell_\beta^\varepsilon(x) = \frac{\ell(x)}{1 - \Delta\mu} \qquad \text{pour } x \in [0, \mu-\varepsilon]$$

$$\ell_\beta^\varepsilon(x) = \frac{\ell(\mu-\varepsilon)}{1 - \Delta\mu} \qquad \text{pour } x \in [\mu-\varepsilon, \mu+\varepsilon]$$

$$\ell_\beta^\varepsilon(x) = \frac{\ell(x) - \Delta\mu}{1 - \Delta\mu} \qquad \text{pour } x \in [\mu+\varepsilon, 1]$$

avec $\Delta\mu = \ell(\mu+\varepsilon) - \ell(\mu-\varepsilon)$. Remarquons que $\Delta\mu \neq 0$, sans quoi $\frac{d\ell}{dx} = 0$ pour $x \in]\mu-\varepsilon, \mu+\varepsilon[$, ce qui serait contraire à l'hypothèse selon laquelle μ est un point d'accumulation de discontinuités de $\frac{d\ell}{dx}$.

De même :

$$\ell_\gamma^\varepsilon(x) = 0 \qquad \text{pour } x \in [0, \mu - \varepsilon]$$

$$\ell_\gamma^\varepsilon(x) = \frac{\ell(x) - \ell(\mu-\varepsilon)}{\Delta\mu} \qquad \text{pour } x \in [\mu-\varepsilon, \mu+\varepsilon]$$

$$\ell_\gamma^\varepsilon(x) = 1 \qquad \text{pour } x \in [\mu+\varepsilon, 1] \qquad (17)$$

4- 3 Décomposition et étude de Var $\hat{m}_n$

On peut écrire $\operatorname{Var} \hat{m}_n = \frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^{r_n} \rho(\beta_i^\varepsilon - \beta_j^\varepsilon) + \frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^{q_n} \rho(\gamma_i^\varepsilon - \gamma_j^\varepsilon)$

$$+ \frac{2}{n^2} \sum_{\substack{i=1\ldots r_n \\ j=1\ldots q_n}} \rho(\beta_i^\varepsilon - \gamma_j^\varepsilon) \qquad (18)$$

L'égalité (18) est vraie quelque soit ε positif, et en particulier lorsque ε tend vers 0. p_n et q_n représentent les nombres d'éléments de la suite tronquée $\{t_i\}_{i \leq n}$ se trouvant dans les sous-suites $\{\beta_i^\varepsilon\}$ et $\{\gamma_i^\varepsilon\}$. Il vient aisément :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{n} = 1 - \Delta\mu$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{q_n}{n} = \Delta\mu$$

Du fait que $\rho(\tau)$ est bornée et $\ell(x)$ continue, le second terme de (18) est aussi petit que l'on veut . En effet on peut écrire :

$$\frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^{q_n} \rho(\gamma_i^\varepsilon - \gamma_j^\varepsilon) \leq \left(\frac{p_n}{n}\right)^2 \rho(0)$$

et $\lim_{\varepsilon\to 0} \lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{n} = \lim_{\varepsilon\to 0} \Delta\mu = 0$

Le troisième terme de (18) se majore de la manière suivante :

$$\left| \frac{2}{n^2} \sum_{\substack{i=1\ldots p_n \\ j=1\ldots q_n}} \rho(\beta_i^\varepsilon - \gamma_j^\varepsilon) \right| \leq 2 \frac{p_n q_n}{n^2} \rho(0)$$

avec $\lim_{\varepsilon\to 0} \lim_{n\to\infty} \frac{p_n q_n}{n^2} = \lim_{\varepsilon\to 0} \Delta\mu(1-\Delta\mu) = 0$

Il s'ensuit, d'après (18) :

$$\text{Var } \hat{m}_\infty = \lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^{p_n} \rho(\beta_i^\varepsilon - \beta_j^\varepsilon)$$

$$\text{Var } \hat{m}_\infty = \lim_{\varepsilon \to 0} (1-\Delta\mu)^2 \lim_{n \to \infty} \frac{1}{p_n^2} \sum_{i,j=1}^{n} \rho(\beta_i^\varepsilon - \beta_j^\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0} (1-\Delta\mu)^2 \lim_{n \to \infty} \Lambda_n^\varepsilon \qquad (19)$$

D'après (16), $\ell_\beta^\varepsilon(x)$ est continue et $\dfrac{d\ell_\beta^\varepsilon}{dx}$, par construction, est continuement différentiable par morceaux. Si cette dernière fonction est de plus à variation bornée, on peut appliquer à A_n^ε les résultats du paragraphe 3. Supposons pour cela $\rho(\tau)$ continue, périodique de période 1 et représentée sous la forme de son développement en série de Fourier :

$$\rho(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \cos 2\pi k \tau$$

D'après les hypothèses, si $\ell_{\beta\beta}(x)$ est la fonction de répartition modulo 1 de la suite $\{\beta_i - \beta_j\}_{i \times j \in N \times N}$; on peut écrire :

$$\frac{d\ell_{\beta\beta}^\varepsilon}{dx} = \int_0^1 \left(\frac{d\ell_\beta^\varepsilon}{dy}\right)_{y = (x+u)_{\text{mod } 1}} d\ell_\beta(u)$$

sauf peut-être sur un ensemble fini de points.

Posant $$\frac{d\ell_\beta^\varepsilon}{dx} = \sum_{k \in N} \sigma_k^\varepsilon \cos 2\pi k(x - \phi_k^\varepsilon)$$

il vient , comme dans § 3-3-1 :

$$\frac{d\ell^{\varepsilon}_{\beta\beta}}{dx} = (\sigma^{\varepsilon}_{0})^2 + \frac{1}{2} \sum_{k \in N} (\sigma^{\varepsilon}_{k})^2 \cos 2\pi k x$$

On sait de plus (§3-2) que

$$\lim_{n\to\infty} A^{\varepsilon}_{n} = \int_0^1 \rho(x)\, d\ell^{\varepsilon}_{\beta\beta}(x)$$

Remplaçant $\rho(x)$ et $d\ell_{\beta\beta}(x)$ par leurs valeurs et intervertissant les signes de sommation (§ 3-4) :

$$\lim_{n\to\infty} A^{\varepsilon}_{n} = \frac{1}{4} \sum_{k \in N} \lambda_k (\sigma^{\varepsilon}_{k})^2$$

Pour étendre sur des hypothèses plus larges les théorèmes VI , VII et VIII , il suffit de démontrer , d'après (19) , que $\lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{k \in N} \lambda_k (\sigma^{\varepsilon}_{k})^2$

$$= \sum_{k \in N} \lambda_k \sigma^2_k \qquad (20)$$

avec $\sigma^{\varepsilon}_{k} = 2\int_0^1 \frac{d\ell^{\varepsilon}_{\beta}}{dx} \cos 2\pi k x\, dx$ et $\sigma_k = 2\int_0^1 \frac{d\ell}{dx} \cos 2\pi kx\, dx$

soit $$\sigma_k - \sigma^{\varepsilon}_{k} = 2 \int_0^{\mu-\varepsilon} + \int_{\mu+\varepsilon}^1 \left(\frac{d\ell}{dx} - \frac{d\ell^{\varepsilon}_{\beta}}{dx} \right) \cos 2\pi kx\, dx$$

$$+ 2 \int_{\mu-\varepsilon}^{\mu+\varepsilon} \frac{d\ell}{dx} \cos 2\pi k x\, dx \qquad (21)$$

Le premier terme du second membre est uniformément borné par rapport à k . Ceci découle directement de l'expression (16) .

Le second terme est majoré par $\int_{\mu-\varepsilon}^{\mu+\varepsilon} \frac{d\ell}{dx}\, dx = \Delta\mu$ qui tend vers 0 avec ε (indépendamment de k) . On en déduit que σ_k^{ε} converge vers σ_k lorsque ε tend vers 0 . La série de terme général λ_k étant absolument convergente, et σ_k majoré, l'expression (20) se trouve démontrée .

4-4 D'ou le théorème IX qui généralise les théorème VI , VII et VIII

On emploie les mêmes notations qu'au § 3, et on note $\ell_{T_j}^{\varepsilon}$ la fonction de répartition modulo T_j de la suite obtenue par filtrage modulo T_j de la suite $\{t_i\}$ autour des points d'accumulation de discontinuité de $\frac{d\ell_{T_j}}{dx}$

Théorème IX

1) $\rho(\tau) = \sum_{k,i} \lambda_{k,i} \cos \frac{2\pi k}{T_i} \tau$

2) $\frac{d\ell_{T_i}(x)}{dx} = \sum_{k \in N} \sigma_{k,i} \cos \frac{2\pi k}{T_i} (x-\phi_{k,i})$

ne comporte que des discontinuités de première espèce , leurs points d'accumulation formant un ensemble fini .

3) $\frac{d\ell_{T_i}^{\varepsilon}}{dx}$ est à variation bornée $\forall\ \varepsilon > 0$, et $\forall\ i$

C Une condition nécessaire et suffisante pour que

$\mathrm{Var}\ \hat{m}_\infty = 0$ est que $\lambda_{k,i}\ \sigma_{k,i} = 0$, $\forall k, \forall i$.

5- Généralisation 2 : $\frac{d\ell}{dx}$ comporte des discontinuités de deuxième espèce.

5-1 Dans le paragraphe précédent, on décompose la suite $\{t_i\}$ en deux sous-suites. La première vérifie les conditions énoncées au paragraphe 3 . La deuxième est construite de telle manière que sa participation aux résultats soit très faible; en se basant sur la continuité de $\ell(x)$, on peut toujours s'arranger pour faire disparaître certains points gênants de $\ell(x)$ par un filtrage de la suite $\{t_i\}$ autour de ces points.

Les résultats énoncés au paragraphe 4 restent vrai tant que l'expression (21) peut être majorée. C'est le cas lorsque $\frac{d\ell}{dx}$ comporte un nombre fini de points d'accumulation de discontinuités (de première ou deuxième espèce) .

5-2 Supposons tout d'abord que $\frac{d\ell}{dx}$ comporte un nombre fini de discontinuités de deuxième espèce, soit μ_1 , $\mu_2 \ldots\ldots \mu_k$. Du fait de la continuité de $\ell(x)$, on peut trouver $\eta(\varepsilon)$ tel que

$$\sum_{i=1}^{k} |\ell(\mu_i + \eta) - \ell(\mu_i - \eta)| < \varepsilon. \qquad (22)$$

On divise la suite $\{t_i\}$ en deux sous-suites (comme dans §4), dont l'une , $\{\beta_i^\varepsilon\}$ est formée des éléments n'appartenant pas à $\bigcup_{i=1}^{k} [\mu_i - \eta , \mu_i + \eta]$. On est alors ramené au cas précédent, puisque ℓ_β^ε est continuement différentiable par morceaux et que la participation de l'autre sous-suite est aussi faible qu'on le désire, d'après (22) . Reste alors à démontrer que (21) peut être majoré, ce qui va de soi

puisque $\frac{d\ell}{dx}$ est intégrable, et à supposer que $\frac{d\ell_\beta^\varepsilon}{dx}$ est à variation bornée, $\forall \varepsilon > 0$.

5-3 Reste le cas où $\frac{d\ell}{dx}$ comporte un seul point d'accumulation de discontinuités (ou un nombre fini).

Soit donc la suite μ_1, $\mu_2 \ldots\ldots \mu_n \ldots$ convergeant vers μ. A ε donné, on peut trouver $\eta(\varepsilon)$ tel que $\ell(\mu+\eta) - \ell(\mu-\eta) < \frac{\varepsilon}{2}$, et tel que $\mu-\eta$ ne soit pas une discontinuité de $\frac{d\ell}{dx}$. Ceci fait, il reste $p(\eta)$ discontinuités à l'extérieur de $[\mu-\eta\ ,\ \mu+\eta]$. Il existe alors $\eta'(\varepsilon)$ tel que $\ell(\mu_i + \eta') - \ell(\mu_i - \eta') < \frac{\varepsilon}{2p}$ et i tel que $\mu_i \notin [\mu-\eta\ ,\ \mu+\eta]$. Nous notons alors $\{\beta_i^\varepsilon\}$ la sous suite extraite de $\{t_i\}$ et telle que $\beta_i^\varepsilon \notin [\mu-\eta,\ \mu+\eta] \bigcup_{k=1}^{p} [\mu_k - \eta'\ ,\ \mu_k + \eta']$. La suite $\{\gamma_i^\varepsilon\}$ est le complémentaire de la suite $\{\beta_i^\varepsilon\}$ par rapport à la suite $\{t_i\}$.

Il est possible de refaire les mêmes calculs que dans le § 4-3, à condition de supposer que $\frac{d\ell_\beta^\varepsilon}{dx}$ est à variation bornée. Employant les mêmes notations, on voit de plus que $\sigma_k - \sigma_k^\varepsilon$ est aussi petit que l'on veut, $\frac{d\ell}{dx}$ étant intégrable, ce qui entraîne par extension le théorème X.

Théorème X

H 1) $\rho(\tau) = \sum_{k,i} \lambda_{k,i} \cos \frac{2\pi k}{T_i} \tau$

$$2)\quad \frac{d\ell_{T_i}}{dx} = \sum_{k \in N}{}' \sigma_{k,i} \cos \frac{2\pi k}{T_i} (x - \phi_{k,i})$$

ne comporte qu'un nombre fini de points d'accumulation de discontinuités de première ou de deuxième espèce .

$$3)\quad \frac{d\ell^{\varepsilon}_{T_i}}{dx} \quad \text{est à variation bornée , } \forall\ i\ , \forall\ \varepsilon > 0$$

C — Une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathrm{Var}\ \hat{m}_\infty = 0$ est que $\lambda_{k,i}\ \sigma_{k,i} = 0\ , \forall k, \forall i$.

6- Conclusion

Les théorèmes IX et X résolvent le problème de l'estimation de la moyenne des processus presque périodiques dans le cas d'un échantillonnage continu modulo les pseudo-périodes de la fonction d'autocorrélation du processus . En fait, la condition de convergence n'est valable que pour des échantillonnages à fonctions de répartition suffisamment régulières. Il semble que, pour trouver des conditions plus larges, il soit nécessaire de faire appel à un outil mathématique plus évolué , dans le sens de l'analyse.

Néanmoins, on peut penser que les résultats acquis sont largement suffisants pour une étude physique , dans le cas où il n'y a aucun synchronisme entre le processus $X(t)$ à étudier et la suite d'échantillonnage $\{t_i\}$.

C H A P I T R E - IV -

CONVERGENCE DE $\hat{m}_n$ LORSQUE

$\rho(\tau)$ EST PRESQUE PERIODIQUE

$\ell(x)$ A UN NOMBRE FINI DE DISCONTINUITES

1- Introduction

Dans le chapitre III, nous avons supposé que la fonction de répartition modulo 1, $\ell(x)$, de l'échantillonnage $\{t_i\}$ était continue. Cette hypothèse exclut un cas physique très important qui est celui d'une synchronisation volontaire entre le processus à étudier et la suite d'échantillonnage. C'est le cas par exemple d'une "détection synchrone". Cette condition revient à se placer dans le cas où, modulo la période (ou une pseudo-période) du processus, la fonction de répartition de la suite est discontinue. C'est ce problème que nous évoquons ici, sous les hypothèses les plus simples, et toujours sous l'angle de la convergence de l'estimateur $\hat{m}_n$.

Pour simplifier, nous reprendrons, dans la mesure du possible, les notations du chapitre III, du moins en ce qui concerne la suite d'échantillonnage $\{t_i\}$ et la fonction d'autocorrélation $\rho(\tau)$, périodique ou presque périodique.

2- Hypothèses.

2-1 Il est bien évident que l'étude de Var $\hat{m}_\infty$ se ramène à l'étude des propriétés modulo T_1, T_2..... de la suite $\{t_i\}$. On se place tout d'abord dans le cas où $\rho(\tau)$ est périodique de période 1, ce qui revient à étudier la suite $\{t_i\}$ modulo 1. En conséquence, on suppose que $t_i \in [0,1[$, $\forall$ i. Les hypothèses concernant $\ell(x)$, fonction de

répartition modulo 1 de la suite $\{t_i\}$ sont les suivantes :

a) $\ell(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{F(n,x)}{n}$ existe pour tout x . ($F(n,x)$, nombre d'éléments de $\{t_i\}_{i \leq n}$ tels que $t_i \in [0,x[$)

b) $\ell(x)$ est continue sur $[0,1]$ sauf en $x = \mu$, point auquel correspond le saut $\Delta\mu$. $\ell_c(x)$, partie continue de $\ell(x)$ est continuement différentiable par morceaux. Ces hypothèses entraînent la propriété suivante :

c) $\frac{F(n,x)}{n}$ converge uniformément vers $\ell(x)$ sur $R - \partial\mu$, $\partial\mu$, ouvert quelconque contenant μ . Ceci découle de la continuité uniforme de $\ell(x)$ sur $[R - \partial\mu]$.

2- 2 Remarques : En général , $\frac{F(n,x)}{n}$ ne converge pas uniformément vers $\ell(x)$. Le contre-exemple suivant le démontre. Considérons la suite $\{t_i\} \equiv \{1/2 - 1/i\}$. On obtient aisément

$$\ell(x) = 0 \quad \text{pour} \quad x < 1/2$$
$$\ell(x) = 1 \quad \text{pour} \quad x \geq 1/2$$

D'autre part $\forall\ \varepsilon \in]0,1[$, $\forall\ N$, $\exists\ a = \frac{1}{2} - \frac{1}{N}$ tel que $\left| \ell(a) - \frac{F(N,a)}{N} \right| = 1$, ce qui constitue la négation de la convergence uniforme . D'autre part, la fonction de répartition de la suite

$\{t_i - t_j\}_{i,j \in N \times N}$, telle qu'elle est définie dans le chapitre III, n'existe pas toujours. Prenons pour cela le contre-exemple suivant :

$$t_i = \frac{1}{2} + \frac{\gamma_i}{i} \quad \text{avec} \quad \gamma_i = 0 \text{ si } i = 2^{2m-1} \dots\dots 2^{2m} - 1 \,, \; m \in N$$

$$\gamma_i = 1 \text{ si } i = 2^{2m} \dots\dots 2^{2m+1} - 1, \; m \in N$$

Alors $\ell(x) = 0$ si $x \leq 1/2$

$\ell(x) = 1$ si $x > 1/2$

Si $F'(n,x)$ et $\ell'(x)$ caractérisent la suite $\{t_i - t_j\}$:

$$\frac{F'(n^2,x)}{n^2} = \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^{n} \frac{F_j(n,x)}{n}$$, $F_j(n,x)$ nombre d'éléments de

la suite $\{t_i - t_j\}_{i \in N}$, j fixé, tels que $(t_i - t_j) \underset{\text{mod } 1}{\in} [0,x[$ et $i \leq n$

Soit $x = 1/2$

Si i tel que $\gamma_i = 0$, $t_j - t_i = \frac{\gamma_j}{j}$ et $F_i(n,1/2) = n$

Si i tel que $\gamma_i = 1$, deux cas se présentent :

$$t_j - t_i \in [0, 1/2[\qquad \gamma_j = 1 \quad \text{et} \quad j \leq i$$

$$t_j - t_i \in [-1/2, 0[\qquad \gamma_j = 0 \text{ ou } (\gamma_j = 1 \text{ et } j > i)$$

Faisons successivement $n = 2^{2p}$ et $n = 2^{2p+1}$

$$\frac{F'(2^{4p},1/2)}{2^{4p}} = \frac{1}{2^{4p}} \left[2^{2p}(2^2 - 1 - 2^1 + 2^2 \times 2 - 1 - 2^3 + \dots\dots + 2^{2p} - 1 - 2^{2p-1}) \right.$$

$$\left. + \sum_{m=1}^{p-1} \left[\sum_{k=0}^{2^{2m}-1} \left(\sum_{q=1}^{m-1} (2^{2q+1} - 1 - 2^{2q}) + k \right) \right] \right]$$

$$\text{et } \lim_{p\to\infty} \frac{F'(2^{4p}, 1/2)}{2^{4p}} = \frac{13}{18}$$

$$\frac{F'(2^{4p+2}, 1/2)}{2^{4p+2}} = \frac{1}{2^{4p+2}} \left[2^{2p+1}(2^2-1-2^1+2^2 \times 2-1-2^3+\ldots+ 2^{2p}-1-2^{2p-1}) \right.$$

$$\left. + \sum_{r=1}^{p} \left[\sum_{k=0}^{2^{2m}-1} \left(\sum_{q=1}^{m-1} (2^{2q+1}-1-2^{2q}) + k \right) \right] \right]$$

$$\text{et } \lim_{p\to\infty} \frac{F'(2^{4p+2}, 1/2)}{2^{4p+2}} = \frac{5}{9}$$

On voit donc que $\ell'(x)$ n'existe pas. Ceci s'explique de la manière suivante ; la discontinuité de $\ell(x)$ est due au fait que la suite $\{t_i\}$ converge vers $x = 1/2$. La suite $\{t_i - t_j\}$ prise modulo 1 ne converge pas vers 0 mais on peut la décomposer en deux sous-suites, l'une convergente vers 0(par valeurs supérieures)et l'autre vers 1 (par valeurs inférieures). Si on arrête la suite $\{t_i - t_j\}$ à son nième élément et si n_0 et n_1 sont les derniers indices correspondants des sous-suites, on s'aperçoit que $\frac{n_0}{n}$ et $\frac{n_1}{n}$ ne convergent vers aucune limite, ce qui fait que la suite a des "discontinuités fluctuantes" et que $\ell'(x)$ n'existe pas.

A moins donc de faire des hypothèses supplémentaires (bien inutiles) sur la discontinuité de $\ell(x)$, on ne peut étudier Var $\hat{m}_\infty$ comme dans le chapitre III.

3- Décomposition de $\{t_i\}$

Décomposons $\{t_i\}$ en deux sous-suites $\{\beta_i\}$ et $\{\gamma_i\}$ de

la manière suivante :

$t_i \in \{\beta_j\}_{j \in N}$ si $t_i \notin [\mu-\varepsilon , \mu+\varepsilon] \subset [0,1[$

$t_i \in \{\gamma_j\}_{j \in N}$ si $t_i \in [\mu-\varepsilon , \mu+\varepsilon]$

ε étant un réel donné, aussi petit que l'on veut. Dans le cas où $\mu = 0$ ou 1, on remplace l'intervalle $[\mu-\varepsilon , \mu+\varepsilon]$ par $[0,\varepsilon] \cup [1-\varepsilon, 1[$, ce qui n'introduit aucune difficulté supplémentaire. **Aussi raisonnerons nous** toujours dans le cas $\mu \neq 0$ et 1 . On note F_β , F_γ , ℓ_β , ℓ_γ les caractéristiques des nouvelles suites. On peut alors écrire, en tenant compte de la parité de $\rho(\tau)$:

$$\text{Var } \hat{m}_n = \left(\frac{p_n}{n}\right)^2 \frac{1}{p_n^2} \sum_{i,j=1}^{p_n} \rho(\beta_i-\beta_j) + \left(\frac{q_n}{n}\right)^2 \frac{1}{q_n^2} \sum_{i,j=1}^{q_n} \rho(\gamma_i-\gamma_j)$$

$$+ \frac{2p_n q_n}{n^2} \frac{1}{p_n q_n} \sum_{\substack{i=1\ldots p_n \\ j=1\ldots q_n}} \rho(\beta_i-\gamma_j) \qquad (1)$$

p_n et q_n représentant les nombres d'éléments des sous-suites, si la suite $\{t_i\}$ est arrêtée à son nième élément.

Ecrivant

$$\text{Var } \hat{m}_n = \left(\frac{p_n}{n}\right)^2 A_1(n,\varepsilon) + \left(\frac{q_n}{n}\right)^2 A_2(n,\varepsilon) + \frac{2p_n q_n}{n^2} A_3(n,\varepsilon) , \qquad (2)$$

nous allons calculer successivement les limites de A_1 , A_2, A_3 lorsque $n \to \infty$ puis $\varepsilon \to 0$.

Il vient successivement, par construction des sous-suites :

$$- \lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{n} = 1 - \left[\ell(\mu+\varepsilon) - \ell(\mu-\varepsilon)\right] = 1 - \theta_\varepsilon$$

$$- \lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{n} = \ell(\mu+\varepsilon) - \ell(\mu-\varepsilon) = \theta_\varepsilon$$

$$- \ell_\beta(x) = \frac{\ell(x)}{1-\theta_\varepsilon} \qquad \text{si } x \in [0, \mu-\varepsilon]$$

$$\ell_\beta(x) = \frac{\ell(\mu-\varepsilon)}{1-\theta_\varepsilon} \qquad \text{si } x \in [\mu-\varepsilon, \mu+\varepsilon]$$

$$\ell_\beta(x) = \frac{\ell(x)-\theta_\varepsilon}{1-\theta_\varepsilon} \qquad \text{si } x \in [\mu+\varepsilon, 1]$$

$\ell_\beta(x)$ est alors continue, et continuement différentiable par morceaux, à condition bien sûr que $\theta_\varepsilon \neq 1$. Cette hypothèse supplémentaire, que nous ne rappellerons pas, n'est pas en fait gênante, les conclusions restant valables dans le cas $\theta_\varepsilon = 1$

4- Etude de $A_1(n,\varepsilon)$

On note $\ell_{\beta\beta}(x)$ la fonction de répartition de la suite $\{\beta_i - \beta_j\}_{i,j \in N \times N}$.

D'après l'équation (9) du chapitre III, on peut écrire, puisque $\ell_\beta(x)$

est continue :

$$\ell_{\beta\beta}(x) = \int_0^1 \ell_\beta\left[(x+u)_{\text{mod } 1}\right] \, d\ell_\beta(u) + \frac{1}{2} - \ell_\beta(1-x) \, , \quad \forall\, x \in [0,1]$$

avec $\ell_{\beta\beta}(x)$ continue, et continûment différentiable par morceaux , comme $\ell_\beta(x)$.

D'autre part, $\rho(\tau)$ étant périodique de période 1 :

$$\lim_{n\to\infty} \quad A_1(n,\varepsilon) = \int_0^1 \rho(x) \quad d\ell_{\beta\beta}(x).$$

Lorsque $\varepsilon \to 0$, $\ell_\beta(x) \to L_\beta(x) = \dfrac{\ell(x)}{1-\Delta\mu}$ si $x \in [0,\mu[$

et

$$L_\beta(x) = \frac{\ell(x)-\Delta\mu}{1-\Delta\mu} \quad \text{si } x \in]\mu, 1[$$

soit encore $L_\beta(x) = \dfrac{\ell_C(x)}{1-\Delta\mu}$, $\forall\, x \in [0,1]$ (3)

Il est clair que $L_\beta(x)$ est continue . D'autre part, on démontre aisément que la convergence de $\ell_\beta(x)$ vers $L_\beta(x)$ est uniforme sur R ; en effet, on peut écrire successivement

$$|L_\beta(x) - \ell_\beta(x)| = \ell(x)\left|\frac{1}{1-\Delta\mu} - \frac{1}{1-\theta_\varepsilon}\right| \leq \left|\frac{1}{1-\Delta\mu} - \frac{1}{1-\theta_\varepsilon}\right| \quad \text{si } x \in [0,\mu-\varepsilon]$$

$$|L_\beta(x)-\ell_\beta(x)| = \left|\frac{\ell(x)}{1-\Delta\mu} - \frac{\ell(\mu-\varepsilon)}{1-\theta_\varepsilon}\right| = \left|\ell(x)\left(\frac{1}{1-\Delta\mu} - \frac{1}{1-\theta_\varepsilon}\right) + \frac{1}{1-\theta_\varepsilon}(\ell(x)-\ell(\mu-\varepsilon))\right|$$

soit $|L_\beta(x) - \ell_\beta(x)| \leq \left| \frac{1}{1-\Delta\mu} - \frac{1}{1-\theta_\varepsilon} \right| + \frac{1}{1-\theta_\varepsilon}(\ell_C(\mu) - \ell_C(\mu-\varepsilon))$

si $x \in [\mu-\varepsilon, \mu[$

$$L_\beta(\mu) - \ell_\beta(\mu) = \frac{\ell_C(\mu)}{1-\Delta\mu} - \frac{\ell_C(\mu-\varepsilon)}{1-\theta_\varepsilon}$$

$$|L_\beta(x) - \ell_\beta(x)| = \left|\frac{\ell_C(x)}{1-\Delta\mu} - \frac{\ell(\mu-\varepsilon)}{1-\theta_\varepsilon}\right| \leq \left|\frac{1}{1-\Delta\mu} - \frac{1}{1-\theta_\varepsilon}\right| + \frac{1}{1-\theta_\varepsilon}(\ell_C(\mu+\varepsilon) - \ell_C(\mu-\varepsilon))$$

si $x \in]\mu, \mu+\varepsilon]$

$$|L_\beta(x) - \ell_\beta(x)| = \ell(x)\left(\frac{1}{1-\Delta\mu} - \frac{1}{1-\theta_\varepsilon}\right) - \frac{\Delta\mu}{1-\Delta\mu} + \frac{\theta_\varepsilon}{1-\theta_\varepsilon}$$

$$|L_\beta(x) - \ell_\beta(x)| \leq \left| \frac{1}{1-\Delta\mu} - \frac{1}{1-\theta_\varepsilon} \right| + \frac{\theta_\varepsilon}{1-\theta_\varepsilon} - \frac{\Delta\mu}{1-\Delta\mu} \quad \text{si } x \in [\mu+\varepsilon, 1]$$

Tous les majorants des cinq expressions précédentes sont indépendants de x, et tendent simultanément vers 0 , en même temps que ε . On a ainsi démontré la convergence uniforme de $\ell_\beta(x)$ vers $L_\beta(x)$. En conséquence $\ell_{\beta\beta}(x)$ convergera uniformément vers $L_{\beta\beta}(x)$ défini par

$$L_{\beta\beta}(x) = \int_0^1 L_\beta\left[(x+u)_{\text{mod } 1}\right] \, d\, L_\beta(u) + \frac{1}{2} - L_\beta(1-x) \qquad (4)$$

d'où $\lim_{\varepsilon\to 0} \lim_{n\to\infty} A_1(n,\varepsilon) = A_1(\infty,0) = \int_0^1 \rho(x)\, dL_{\beta\beta}(x)$

avec $$\frac{dL_{\beta\beta}(x)}{dx} = \int_0^1 \left(\frac{dL_\beta}{dy}\right)_{y=(x+u)_{\text{rod } 1}} d\, L_\beta(u)$$

dans les intervalles où l'on peut dériver $L_\beta(x)$ sous le signe somme. Remarquons qu'en fait, la convergence simple de ℓ_β vers L_β est suffisante pour obtenir (4) .

5- Etude de $A_2(n,\varepsilon)$

$$A_2(n,\varepsilon) = \frac{1}{q_n^2} \sum_{i,j=1}^{q_n} \rho(\gamma_i - \gamma_j)$$

$\gamma_i \in [\mu-\varepsilon, \mu+\varepsilon]$ donc $(\gamma_i - \gamma_j)_{\text{mod } 1} \in [0,2\varepsilon] \cup [1-2\varepsilon, 1[$

Comme $\rho(\tau)$ est continue, périodique, et $\rho(0)>0$, il existe ε_0 tel que

$2\varepsilon \leq \varepsilon_0 \Rightarrow \rho(2\varepsilon) \geq \rho(\varepsilon_0) > 0$ et $\rho(\tau) \geq \rho(\varepsilon_0) > 0$ sur $[0, 2\varepsilon] \cup [1-2\varepsilon, 1[$

Il s'ensuit que $A_2(n,\varepsilon) \in [\rho(2\varepsilon), \rho(0)]$ et ceci $\forall$ n . Lorsque $\varepsilon \to 0$,

$A_2(n,\varepsilon) \to \rho(0)$, $\forall$ n .

Donc $\lim_{\varepsilon\to 0} \lim_{n\to\infty} A_2(n,\varepsilon) = \lim_{n\to\infty} \lim_{\varepsilon\to 0} A_2(n,\varepsilon) = A_2(\infty,0) = \rho(0)$. (5)

6- Etude de $A_3(n,\varepsilon)$

6-1 $$A_3(n,\varepsilon) = \frac{1}{p_n\, q_n} \sum_{\substack{i=1.....p_n \\ j=1.....q_n}} \rho(\beta_i - \gamma_j)$$

On définit la suite $\{\beta_i - \gamma_j\}_{i,j \in N \times N}$ par le tableau suivant ,

parcouru de façon que le dernier terme soit $\beta_{p_n} - \gamma_{q_n}$, et complété

par la ligne $\beta_1 - \gamma_{p_{n+1}}$ ..... $\beta_{p_n} - \gamma_{p_{n+1}}$ si $t_{n+1} \in [\mu-\varepsilon, \mu+\varepsilon]$,

ou par la colonne $\beta_{q_{n+1}} - \gamma_1 , \ldots\ldots \beta_{q_{n+1}} - \gamma_{q_n}$ si $t_{n+1} \notin$

$[\mu-\varepsilon , \mu+\varepsilon]$:

$$\begin{array}{llll} \beta_1 - \gamma_1 & \beta_2 - \gamma_1 & \ldots\ldots\ldots\ldots & \beta_{p_n} - \gamma_1 \\ \beta_1 - \gamma_2 & \beta_2 - \gamma_2 & \ldots\ldots\ldots\ldots & \beta_{p_n} - \gamma_2 \\ \vdots & & & \\ \beta_1 - \gamma_{q_n} & \beta_2 - \gamma_{q_n} & \ldots\ldots\ldots\ldots & \beta_{p_n} - \gamma_{q_n} \end{array}$$

On note $F_{\beta\gamma}(n,x)$ et $\ell_{\beta\gamma}(x)$ les caractéristiques de la suite ainsi définie. On va montrer que $\ell_{\beta\gamma}$ existe et s'exprime en fonction de $\ell_\beta(x)$ et $\ell_\gamma(x)$, sous la forme :

$$\ell_{\beta\gamma}(x) = \int_0^1 \ell_\beta\left[(x+u) \mod 1\right] \, d\ell_\gamma(u) + 1 - \ell_\gamma(1-x) - \frac{\ell(\mu-\varepsilon)}{1-\theta_\varepsilon}$$

6-2 Soit $F_j(n,x)$ et $\ell_j(x)$ les caractéristiques de la suite $\{\beta_i - \gamma_j\}_{i \in N}$, à j fixé.

Il vient (voir chapitre 3 , § 2-2-1)

$$\ell_j(x) = \ell_\beta(x+\gamma_j) - \ell_\beta(\gamma_j) \qquad \text{si } x + \gamma_j \leq 1$$

$$\ell_j(x) = \ell_\beta(x+\gamma_j - 1) + 1 - \ell_\beta(\gamma_j) \qquad \text{si } x + \gamma_j > 1$$

$\ell_j(x)$ possède les mêmes propriétés que $\ell_\beta(x)$, à savoir :

1) $\ell_j(x)$ existe $\forall\ x \in [0,1]$ avec $\ell_j(0) = 0$ et $\ell_j(1) = 1$

2) $\ell_j(x)$ est continue, et dérivable sauf peut-être sur un ensemble fini de points.

3) $\dfrac{F_j(n,x)}{n}$ converge uniformément vers $\ell_j(x)$, sur $x \in R$.

4) $\dfrac{F_j(n,x)}{n}$ converge uniformément vers $\ell_j(x)$ sur $j \in N$

6-3 On écrit alors : $F_{\beta\gamma}(p_n\ q_n,x) = \sum_{j=1}^{q_n} F_j(p_n,x)$

et $\Lambda_{p_n\ q_n}(x) = \dfrac{F_{\beta\gamma}(p_n\ q_n,x)}{p_n\ q_n} = \dfrac{1}{q_n}\left[\sum_{j \in J_{q_n}} + \sum_{j \in K_{q_n}} \dfrac{F_j(p_n,x)}{p_n}\right]$

J_{q_n} et K_{q_n} étant les enserbles d'indices $j \leq q_n$ tels que respectivement

$\gamma_j \leq 1-x$ et $\gamma_j > 1-x$.

D'après le § 6-2 :

$$j \in J_{q_n} \Rightarrow \lim_{p_n \to \infty} \frac{F_j(p_n,x)}{p_n} = \ell_\beta(x+\gamma_j) - \ell_\beta(\gamma_j)$$

$$j \in K_{q_n} \Rightarrow \lim_{p_n \to \infty} \frac{F_j(p_n,x)}{p_n} = \ell_\beta(x+\gamma_j-1)+1 - \ell_\beta(\gamma_j)$$

D'où

$$\Lambda_{p_n\, q_n}(x) = \frac{1}{q_n}\left[\sum_{j \in J_{q_n}} \ell_\beta(x+\gamma_j) + \sum_{j \in K_{q_n}} (\ell_\beta(x+\gamma_j-1)+1) \right.$$

$$\left. - \sum_{j=1}^{q_n} \ell_\beta(\gamma_j) + \sum_{j=1}^{q_n} \varepsilon_j(p_n,x) \right]$$

avec $\varepsilon_j(p_n,x) = \ell_j(x) - \frac{F_j(p_n,x)}{p_n}$ et $\lim_{n\to\infty} \Lambda_{p_n\, q_n}(x) = \ell_{\beta\gamma}(x)$

si du moins cette limite existe.

De la propriété 4 du § 6-2 , on déduit que $\varepsilon_j(p_n,x)$ converge uniformément vers 0 sur l'indice j ; en conséquence $\Phi(p_n,x) = \frac{1}{q_n} \sum_{j=1}^{q_n} \varepsilon_j(p_n,x)$ converge aussi vers 0 , lorsque p_n (et donc q_n) augmente indéfiniment.

Posons maintenant

$$\{\gamma'_j\}_{j=1....q'_n} \equiv \{\gamma_j\}_{j \in J_{q_n}}$$

et

$$\{\gamma''_j\}_{j=1....q''_n} \equiv \{\gamma_j\}_{j \in K_{q_n}} \quad \text{avec } q'_n + q''_n = q_n$$

$\ell'_j(x)$ et $\ell''_j(x)$ sont les fonctions de répartition correspondantes.

Si $x \neq 1-\mu$, il s'ensuit que $\lim_{q_n\to\infty} \frac{q'_n}{q_n} = \ell_\gamma(1-x)$ et

$\lim_{n\to\infty} \frac{q''_n}{q_n} = 1 - \ell_\gamma(1-x)$. On ne conclut pas dans le cas $x = 1 - \mu$,

mais nous verrons par la suite que c'est sans importance .

Comme $\ell_\beta(x)$ est continue, on en déduit les limites suivantes :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{q'_n} \sum_{j \in J_{q_n}} \ell_\beta(x+\gamma_j) = \int_0^{1-x} \ell_\beta(x+u)\, d\ell'_\gamma(u)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{q''_n} \sum_{j \in K_{q_n}} \ell_\beta(x+\gamma_j-1) = \int_{1-x}^{1} \ell_\beta(x+u-1)\, d\ell''_\gamma(u)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{q_n} \sum_{j=1}^{q_n} \ell_\beta(\gamma_j) = \int_0^1 \ell_\beta(u)\, d\ell_\gamma(u) = \int_{\mu-\varepsilon}^{\mu+\varepsilon} \frac{\ell(\mu-\varepsilon)}{1-\theta_\varepsilon}\, d\ell(u) = \frac{\ell(\mu-\varepsilon)}{1-\theta_\varepsilon}$$

D'où

$$\ell_{\beta\gamma}(x) = \int_0^{1-x} \ell_\beta(x+u)\, d\ell_\gamma(u) + \int_{1-x}^{1} \ell_\beta(x+u-1)\, d\ell_\gamma(u) + 1 - \ell_\gamma(1-x) - \frac{\ell(\mu-\varepsilon)}{1-\theta_\varepsilon}$$

ou

$$\ell_{\beta\gamma}(x) = \int_0^1 \ell_\beta\left[(x+u)_{\text{mod } 1}\right] d\ell_\gamma(u) + 1 - \ell_\gamma(1-x) - \frac{\ell(\mu-\varepsilon)}{1-\theta_\varepsilon} \quad \text{pour } x \in [0,1]$$

avec $x \neq 1-\mu$

On vérifie que $\ell_{\beta\gamma}(x)$ existe toujours, et est continue (même en $x = 1-\mu$) , puisqu'elle est non décroissante.

En conséquence

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{r_n q_n} \sum_{\substack{i=1,\dots p_n \\ j=1,\dots q_n}} \rho(\beta_i - \beta_j) = \int_0^1 \rho(x)\, d\ell_{\beta\gamma}(x)$$

toujours sous l'hypothèse $\rho(x)$ de période 1 .

Lorsque $\varepsilon \to 0$, $\ell_\beta(x)$ converge vers $L_\beta(x)$, fonction continue , et cela uniformément sur R. (voir § 4) .

D'autre part, $\ell_\gamma(x)$ converge vers $L_\gamma(x)$ définie par $L_\gamma(x) = 0$ pour $x \in [0,\mu[$ et $L_\gamma(x) = 1$ pour $x \in]\mu, 1]$. Il s'ensuit que $\ell_{\beta\gamma}(x)$ converge uniformément vers $L_{\beta\gamma}(x)$ continue , définie par

$$L_{\beta\gamma}(x) = L_\beta\left[(x+\mu)_{\text{mod } 1}\right] - \frac{\ell_C(\mu)}{1-\Delta\mu} \quad \text{pour } x \in [0,1-\mu[$$

$$L_{\beta\gamma}(x) = 1 - \frac{\ell_C(\mu)}{1-\Delta\mu} \quad \text{pour } x = 1-\mu$$

$$L_{\beta\gamma}(x) = L_\beta\left[(x+\mu)_{\text{mod } 1}\right] + 1 - \frac{\ell_C(\mu)}{1-\Delta\mu} \quad \text{pour } x \in]1-\mu, 1] \tag{6}$$

D' où $$\lim_{\varepsilon\to 0} \lim_{n\to\infty} A_3(n,\varepsilon) = A_3(\infty,0) = \int_0^1 \rho(x)\, dL_{\beta\gamma}(x) \tag{7}$$

6-4 Utilisant alors les expressions (1) , (2) , (3) , (4) , (5) , (6) , (7) , il vient :

$$\text{Var } \hat{m}_\infty = (1-\Delta\mu)^2 \int_0^1 \rho(x)\, dL_{\beta\beta}(x) + 2\Delta\mu\,(1-\Delta\mu) \int_0^1 \rho(x)\, dL_{\beta\gamma}(x) + \Delta\mu^2\, \rho(0) \quad (8)$$

avec - $L_\beta(x) = \dfrac{\ell_C(x)}{1-\Delta\mu}$ si $x \in [0,1]$

- $L_{\beta\beta}(x) = \displaystyle\int_0^1 L_\beta\left[(x+u)_{\text{mod } 1}\right] dL_\beta(u) + \frac{1}{2} - L_\beta(1-x)$

- $L_{\beta\gamma}(x) = L_\beta\left[(x+\mu)_{\text{mod } 1}\right] - \dfrac{\ell_C(\mu)}{1-\Delta\mu}$ pour $x \in [0, 1-\mu[$

$L_{\beta\gamma}(x) = 1 - \dfrac{\ell_C(\mu)}{1-\Delta\mu}$ pour $x = 1-\mu$

$L_{\beta\gamma}(x) = L_\beta\left[(x+\mu)_{\text{mod } 1}\right] + 1 - \dfrac{\ell_C(\mu)}{1-\Delta\mu}$ pour $x \in]1-\mu, 1]$

Si $\ell_C(x)$ est continuement différentiable par morceaux, il en est de même de $L_{\beta\beta}(x)$ et $L_{\beta\gamma}(x)$ (voir chap III §2-3-1) . Si de plus , $\dfrac{d\ell_C}{dx}$ est à variation bornée , on pourra intervertir les signes de sommation dans les intégrales de (8) , après développements en séries de Fourier de $\rho(x)$, $L_{\beta\beta}(x)$, $L_{\beta\gamma}(x)$.

7 - Cas particulier : $\rho(\tau) = \cos 2\pi\tau$

7.1 On pose $\dfrac{d\ell_C(x)}{dx} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos 2\pi k x + b_k \sin 2\pi k x)$ (9)

avec $\frac{dL_\beta(x)}{dx} = \frac{1}{1-\Delta\mu} d\ell_C(x)$ (10)

D' où l'on tire successivement :

$$\frac{dL_{\beta\beta}(x)}{dx} = \frac{1}{(1-\Delta\mu)^2} \left[\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \cos 2\pi k x + a_0^2 \right] \quad (11)$$

$$\frac{dL_{\beta\gamma}(x)}{dx} = \left(\frac{dL_\beta}{dy} \right)_{y = (x+\mu) \bmod 1} \quad (12)$$

Reportant (9) (10) (11) et (12) dans (8) on obtient :

$$\text{Var } \hat{m}_\infty = \frac{1}{4} (a_1^2 + b_1^2) + \Delta\mu (a_1 \cos 2\pi\mu + b_1 \sin 2\pi\mu) + \Delta\mu^2$$

Notant alors σ et $2\pi\phi$ le module et l'argument de $a_1 + ib_1$:

$$\text{Var } \hat{m}_\infty = \frac{\sigma^2}{4} + \sigma\Delta\mu \cos 2\pi(\mu-\phi) + \Delta\mu^2$$

Var $\hat{m}_\infty$ s'exprime donc sous la forme d'un trinôme en σ, positif ou nul.

Par définition, la convergence de l'estimateur $\hat{m}_n$ s'écrit Var $\hat{m}_\infty = 0$.

Pour cela, il faut d'abord que le discriminant Δ de Var $\hat{m}_\infty$ soit nul .

$$\Delta = -\Delta\mu^2 \sin^2 2\pi(\mu-\phi)$$

soit

$$\Delta = 0 \iff \mu-\phi = \frac{k}{2}, \; k \in Z$$

Le trinôme se ramène alors à

$$\text{Var } \hat{m}_\infty = \frac{1}{4} (\sigma + 2(-1)^k \Delta\mu)^2$$

On en déduit le théorème XI , sous les hypothèses précédentes concernant $\ell(x)$:

7-2 Théorème XI Une condition nécessaire et suffisante pour que Var $\hat{m}_\infty = 0$ est que le coefficient du fondamental de $\frac{d\ell_C}{dx}$ vérifie :

$$\phi = (\mu + \frac{1}{2})_{\text{mod } 1}$$

$$\sigma = 2\,\Delta\mu$$

D'autre part il est bien évident que, μ et $\Delta\mu$ étant donnés, il n'existe pas toujours $\ell_C(x)$ tel que Var $\hat{m}_\infty = 0$. En effet

$$a_1 = 2\int_0^1 \frac{d\ell_C}{dx} \cos 2\pi x\, dx = 2(1-\Delta\mu) + 4\pi \int_0^1 \ell_C(x) \sin 2\pi x\, dx$$

et $|a_1| \in [0, 2(1-\Delta\mu)[$

$$b_1 = 2\int_0^1 \frac{d\ell_C}{dx} \sin 2\pi x\, dx = -4\pi \int_0^1 \ell_C(x) \cos 2\pi x\, dx$$

et $|b_1| \in [0, 2(1-\Delta\mu)[$

d' où $\sigma < (1-\Delta\mu)\sqrt{2}$ ce qui impose $\Delta\mu < 2 - \sqrt{2}$

Ce résultat s'améliore de la manière suivante :

7-3 Théorème XII

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un échantillonnage dont le saut est $\Delta\mu$, et tel que Var $\hat{m}_\infty = 0$ est que $\Delta\mu < \frac{1}{2}$

7-3-1 condition nécessaire

Comme $\sigma^2 = a_1^2 + b_1^2$, il vient $\sigma^2 = 4\int_0^1 \int_0^1 \cos 2\pi(u-v)\, d\ell_C(u)\, d\ell_C(v)$

On considère la classe A des fonctions ℓ_C définies sur $[0,1]$ non décroissantes, continues, à dérivée continue par morceaux et à variation bornée.

D'autre part, ℓ_C doit vérifier les conditions aux limites $\ell_C(0) = 0$, $\ell_C(1) = 1 - \Delta\mu \neq 0$. Considérant $\dfrac{d\ell_C(x)}{dx}$ comme une fonction périodique de période 1, on remarque d'abord que σ^2 reste invariant dans une translation de $\dfrac{d\ell_C(x)}{dx}$. En effet :

$$\sigma^2 = 4 \int_0^1 \frac{d\ell_C}{dv} \left[\int_0^1 \frac{d\ell_C}{du} \cos 2\pi (u-v)\, du \right] dv = 4 \int_0^1 \frac{d\ell_C}{dv} f(v)\, dv$$

avec $f(v) = \displaystyle\int_0^1 \frac{d\ell_C}{du} \cos 2\pi (u-v)du$. Comme $\dfrac{d\ell_C}{du} \cos 2\pi (u-v)$

est périodique par rapport à u, $f(v) = \displaystyle\int_\theta^{1+\theta} \frac{d\ell_C}{du} \cos 2\pi (u-v)\, du$

D'autre part, f(v) est périodique. Donc

$$\sigma^2 = 4 \int_\theta^{1+\theta} \frac{d\ell_C}{dv} f(v)\, dv = 4 \int_\theta^{1+\theta} \int_\theta^{1+\theta} \frac{d\ell_C}{dv} \frac{d\ell_C}{du} \cos 2\pi(u-v)\, du\, dv$$

soit

$$\sigma^2 = 4 \int_0^1 \int_0^1 \cos 2\pi(u-v) \left(\frac{d\ell_C}{dy}\right)_{y=u+\theta} \left(\frac{d\ell_C}{dy}\right)_{y=v+\theta} du\, dv$$

Supposons maintenant que $\dfrac{d\ell_C}{dx}$ soit non nulle seulement sur Δ , réunion d'ouverts ; d'après la remarque précédente, on peut supposer qu'un sous-ensemble de la forme $]0,a[$ appartient à Δ, et que, dans Δ, $\dfrac{d\ell_C}{dx} \neq 0$

Alors il existe $\ell'_C \in A$ tel que $\sigma'^2 > \sigma^2$ (σ et σ' modules des fondamentaux dans les développements de $\frac{d\ell_C}{dx}$ et $\frac{d\ell'_C}{dx}$).

On peut prendre par exemple

$$\frac{d\ell'_C}{dx} = 0 \qquad \text{pour } x \notin \left]0, \tfrac{1}{4}\right[$$

$$\frac{d\ell'_C}{dx} = \frac{d\ell_C}{dx} + \left(\frac{d\ell_C}{dy}\right)_{y=x+\frac{1}{4}} + \left(\frac{d\ell_C}{dy}\right)_{y=x+\frac{1}{2}} + \left(\frac{d\ell_C}{dy}\right)_{y=x+\frac{3}{4}}$$

pour $x \in \left]0, \tfrac{1}{4}\right[$

Si on note $\partial_1 = \left]0, \tfrac{1}{4}\right[$, $\partial_2 = \left]\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}\right[$, $\partial_3 = \left]\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{4}\right[$,

$\partial_4 = \left]\tfrac{3}{4}, 1\right[$, il vient :

$$\frac{\sigma^2}{4} = \sum_{i,j=0}^{3} \iint_{\partial_{i+1} \times \partial_{j+1}} \cos 2\pi(u-v)\, d\ell_C(u)\, d\ell_C(v)$$

$$\frac{\sigma'^2}{4} = \iint_{\partial_1 \times \partial_1} \cos 2\pi(u-v)\, d\ell'_C(u)\, d\ell'_C(v)$$

$$= \sum_{i,j=0}^{3} \iint_{\partial_1 \times \partial_1} \cos 2\pi\,(u_1-v_1)\, d\ell_C\left(u_1 + \tfrac{i}{4}\right) d\ell_C\left(v_1 + \tfrac{j}{4}\right)$$

En opérant dans σ'^2 le changement de variables $u = u_1 + \frac{i}{4}$, $v = v_1 + \frac{j}{4}$, on obtient :

$$\frac{\sigma'^2 - \sigma^2}{4} = \sum_{\substack{i,j=0 \\ i \neq j}}^{3} \iint_{\partial_{i+1} \times \partial_{j+1}} \left\{\cos\left[2\pi(u-v) + \frac{\pi}{2}(i-j)\right] - \cos 2\pi(u-v)\right\} d\ell_C(u)\, d\ell_C(v)$$

d'où $\sigma'^2 - \sigma^2 > 0$ à condition que $\frac{d\ell_C}{dx} \not\equiv 0$ sur $]\frac{1}{4}, 1[$, puisque

$\cos [2\pi(u-v) + \frac{\pi}{2}(i-j)] - \cos 2\pi (u-v) > 0$ dans $\bigcup_{\substack{i,j=0 \\ i \neq j}}^{3} \partial_{i+1} \times \partial_{j+1}$

Reste à traiter le cas $\frac{d\ell_C}{dx} \equiv 0$ sur $]\frac{1}{4}, 1[$. Alors, $a \leq \frac{1}{4}$.

On définit $\frac{d\ell'_C}{dx}$ par : $\frac{d\ell'_C}{dx} = 0$ si $x \notin]0, \frac{a}{2}[$

$$\frac{d\ell'_C}{dx} = \frac{d\ell_C}{dx} + \left(\frac{d\ell_C}{dy}\right)_{y=x+\frac{a}{2}}$$

si $x \in]0, \frac{a}{2}[$

Il vient :

$$\frac{\sigma'^2 - \sigma^2}{4} = \iint_{]0,\frac{a}{2}[^2} \cos 2\pi(u-v) \left[d\ell_C(u)\, d\ell_C(v+\tfrac{a}{2}) + d\ell_C(u+\tfrac{a}{2})\, d\ell_C(v\right.$$

$$\left. + d\ell_C(u+\tfrac{a}{2}) d\ell_C(v+\tfrac{a}{2})\right] - \iint_{]0,a[^2 -]0,\frac{a}{2}[^2} \cos 2\pi(u_1-v_1)\, d\ell_C(u_1)\, d\ell_C(v_1)$$

expression qui devient, en posant $u_1 = u + \frac{a}{2}$, $v_1 = v + \frac{a}{2}$

$$\frac{\sigma'^2 - \sigma^2}{4} = \iint_{]0,\frac{a}{2}[^2} \cos 2\pi (u-v) \left[d\ell_C(u)\, d\ell_C(v+\tfrac{a}{2}) + d\ell_C(u+\tfrac{a}{2})\, d\ell_C(v)\right]$$

Dans $]0, \frac{a}{2}[^2$, $\cos 2\pi(u-v) > 0$ et $d\ell_C(u)\, d\ell_C(v+\frac{a}{2}) + d\ell_C(u+\frac{a}{2}) d\ell_C(v) > 0$

donc $\sigma'^2 > \sigma^2$.

Pour connaître un majorant de σ^2, il faut donc prendre des fonctions $\ell_C \in \Lambda$ non nulles seulement sur un intervalle $]0,\varepsilon[$ avec ε le plus petit possible.

On peut alors écrire $\frac{\sigma^2}{4} = \iint_{]0,\varepsilon[^2} \cos 2\pi(u-v)\, d\ell_C(u)\, d\ell_C(v)$

ou $\frac{\sigma^2}{4} = \int_0^\varepsilon d\ell_C(u) \left[\int_0^\varepsilon \cos 2\pi(u-v)\, d\ell_C(v)\right] = \int_0^\varepsilon f(u)\, d\ell_C(u)$

avec $(1-\Delta\mu) \cos 4\pi\varepsilon < f(u) \leqslant 1-\Delta\mu$ pour $u \in]0,\varepsilon[$, (1er th. de la moyenne)

D'où $(1-\Delta\mu)^2 \cos 4\pi\varepsilon \leqslant \frac{\sigma^2}{4} \leqslant (1-\Delta\mu)^2$ et $(1-\Delta\mu)\sqrt{\cos 4\pi\varepsilon} \leqslant \frac{\sigma}{2} \leqslant 1-\Delta\mu$,

$\forall\, \varepsilon > 0$

On peut encore améliorer ce résultat et écrire $(1-\Delta\mu)\sqrt{\cos 4\pi\varepsilon} \leqslant \frac{\sigma}{2} < 1-\Delta\mu$

car $\frac{\sigma}{2} = 1 - \Delta\mu$ entraînerait $\iint_{]0,\varepsilon[^2} [\cos 2\pi(u-v) - 1]\, d\ell_C(u)\, d\ell_C(v) = 0$

soit $\cos 2\pi\,(u-v) = 1$ presque partout, ce qui est absurde .

Pour que $\ell_C(x)$ soit la partie continue de la fonction de répartition d'un échantillonnage convergent, il faut que $\sigma = 2\Delta\mu < 2(1-\Delta\mu)$ ce qui entraîne bien $\Delta\mu < \frac{1}{2}$.

7-3-2 Condition suffisante

On veut montrer que si $\rho(\tau) = \cos 2\pi\,\tau$, on peut toujours trouver un échantillonnage convergent dont la fonction de répartition possède une discontinuité μ telle que $\Delta\mu < \frac{1}{2}$

D'après le § 7-3-1 , la condition est nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante. Pour cela on cherche $\ell_C \in A$ telle que $\sigma = 2\Delta\mu$, sachant que $\Delta\mu < \frac{1}{2}$

La solution est immédiate : prenons par exemple $\frac{d\ell_C}{dx} = \frac{1-\Delta\mu}{a}$

pour $x \in]0,a[\subset]0,1[$ et 0 ailleurs. Cette fonction appartient bien à Λ.

On peut écrire :

$$\sigma^2 = 4\left(\frac{1-\Delta\mu}{a}\right)^2 \iint_{]0,a[^2} \cos 2\pi (u-v)\, du\, dv.$$ Un calcul simple donne :

$$\sigma = \frac{2 \sin \pi a}{\pi a}(1-\Delta\mu)$$

L'équation $\sigma = 2\Delta\mu$ se résout par rapport à a :

$$\frac{2\sin\pi a}{\pi a}(1-\Delta\mu) = 2\Delta\mu\,, \quad \frac{\sin \pi a}{\pi a} = \frac{\Delta\mu}{1-\Delta\mu} \in]0,1[$$

Cette équation a une solution (et une seule) $a \in]0,1[$ ce qui achève le problème.

Notons que la condition de phase n'intervient pas, car, en translatant $\frac{d\ell_C}{dx}$, σ ne varie pas, tandis que la phase ϕ du fondamental varie continuement modulo 1 sur $[0,1[$. Pour démontrer cette dernière propriété, définissons $\frac{d\ell_C}{dx}$ de la manière suivante :

1°) $\frac{d\ell_C}{dx} = \frac{1-\Delta\mu}{a}$ pour $x \in [\alpha, \alpha+a]$, et 0 ailleurs.

avec $\frac{\sin\pi a}{\pi a} = \frac{\Delta\mu}{1-\Delta\mu}$ et $\alpha \in [0, 1-a[$

2°) $\frac{d\ell_C}{dx} = \frac{1-\Delta\mu}{a_1+a_2}$ pour $x \in [0,a_1] \cup [1-a_2,1]$,

et 0 ailleurs, avec $a_1 + a_2 = a$ et a_1 , a_2 non négatifs .

Dans le premier cas, $\sin 2\pi\phi = \frac{1}{\Delta\mu} \frac{1-\Delta\mu}{a} \int_{\alpha}^{\alpha+a} \cos 2\pi u \, du$

$= \cos\pi (2\alpha+a)$

d'où $\sin 2\pi\phi \in [-1, \cos\pi a]$

Dans le deuxième cas, $\sin 2\pi\phi = \frac{1}{\Delta\mu} \frac{1-\Delta\mu}{a} \left[\int_{0}^{a_1} + \int_{1-a_2}^{1} \cos 2\pi u \, du \right]$

$= \cos (a_1 - a_2)$

d'où $\sin 2\pi\phi \in [\cos \pi a, 1]$, ce qui montre bien que ϕ peut prendre toutes les valeurs de $[0,1[$.

8- Cas particulier : $\rho(\tau)$ périodique

Alors $\rho(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \cos 2\pi k \tau$ avec $\lambda_k \geq 0$ et $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k = 1$. Ce développement converge uniformément car $\rho(\tau)$ est continue. Ceci nous donne la possibilité d'intervertir les signes de sommation dans (8) . Il s'ensuit que

$$\text{Var } \hat{m}_\infty = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \sigma^2{}_k + \Delta\mu \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \sigma_k \cos 2\pi k (\phi_k - \mu) + \Delta\mu^2$$

avec $\sigma^2{}_k$, $2k\pi \phi_k$, module et argument de (a_k, b_k), coefficients du $k^{\text{ième}}$ harmonique de $\frac{d\ell_C}{dx}$. On peut aussi écrire :

$$\text{Var } \hat{m}_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k Q_k \quad \text{avec} \quad Q_k = \frac{1}{4} \sigma^2{}_k + \sigma_k \Delta\mu \cos 2\pi k(\phi_k - \mu) + \Delta\mu^2$$

Q_k trinôme en σ_k , est défini non négatif puisque son discriminant est $\Delta_k = -\Delta\mu^2 \sin^2 2\pi k(\phi_k - \mu)$.

Il s'ensuit que l'équation Var $\hat{m}_\infty = 0$ peut s'écrire $\lambda_k Q_k = 0$, $\forall\ k \in N$, d'où la condition nécessaire et suffisante de de convergence exprimée sur $\frac{d\ell_C(x)}{dx}$:

$$\phi_k = (\mu + \frac{2k' + 1}{2k})_{\mod 1} \quad , \quad k' \in Z$$

$$\sigma_k = 2\Delta\mu \quad \text{pour tous les } k \in N \text{ tels que } \lambda_k \neq 0$$

Ceci démontre que, si $\ell_C \in A$, et si le spectre du processus périodique étudié est non majoré ($\forall\ m \in N$, $\exists\ k > m$ tel que $\lambda_k \neq 0$) , l'échantillonnage est alors toujours non convergent. En effet, $\frac{d\ell_C}{dx}$ étant continue par morceaux et à variation bornée, cela entraîne $\sigma_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ et, à $\Delta\mu$ donné non nul, la condition $\sigma_k = 2\Delta\mu$ ne peut être remplie pour tout k tel que $\lambda_k \neq 0$.

Reste le cas d'un processus périodique à spectre borné dont la fonction d'autocorrélation a la forme $\rho(\tau) = \sum_{k \in I} \cos 2\pi k\tau$ avec I, ensemble fini extraît de N. Il semble difficile de déterminer de manière précise l'ensemble A' extrait de A, dont les éléments ℓ_C caractérisent des échantillonnages convergents.

Tout au plus peut-on écrire, si $\Delta\mu \leq \frac{1}{2n + 1}$, que $\ell_C(x) = 1 - \Delta\mu - 2\Delta\mu \sum_{k \in I} \cos 2\pi k (x - \mu)$ résout le problème. En effet le

minimum de $\ell_C(x)$, si I comprend n éléments, est $(\ell_C)_{min} = 1 - (2n+1)\mu \geq 0$ avec $\int_0^1 \ell_C(x)\,dx = 1 - \Delta\mu$. Cette solution n'est bien sûr pas la seule , comme on s'en aperçoit en faisant $n = 1$.

9- $\rho(\tau)$ presque périodique

Les paragraphes 7 et 8 étudient le cas où $\rho(\tau)$ est périodique de période 1 . Il est bien évident que si la période de $\rho(\tau)$ est $T \neq 1$, les résultats restent inchangés, mais par rapport à la fonction de répartition $\ell_T(x)$ de la suite $\{t_i\}$. Dans ce cas, pour ne pas trop modifier les notations, on ajoutera seulement l'indice T à tous les paramètres extraits de $\ell_T(x)$; exemples : $\ell_{C,T}(x)$, $\ell_{D,T}(x)$, $\sigma^2_{k,T}$ ....

Si $\rho(\tau)$ est presque périodique, c'est-à-dire de la forme $\rho(\tau) = \sum_{i,k} \lambda_{i,k} \cos \frac{2\pi k \tau}{T_i}$, le problème se complique. Les pseudo-périodes de $\rho(\tau)$ étant T_1 , T_2 ..... T_n..... , la convergence de l'échantillonnage dépend des fonctions de répartition $\ell_{T_1}(x)$, $\ell_{T_2}(x)$,.., de $\{t_i\}$. Sachant par exemple que $\ell_{T_1}(x)$ possède une discontinuité (μ_{T_1} ,$\Delta\mu_{T_1}$) , on ne peut rien dire sur les discontinuités éventuelles de $\ell_{T_i}(x)$, à moins que $\Delta\mu_{T_1} \geq \frac{1}{2}$, auquel cas, l'échantillonnage est de toute façon non convergent (pour ℓ_{C,T_1} , A_{T_1}) . Il faut donc connaître a priori toutes les fonctions $\ell_{T_i}(x)$. Dans ce cas, tout se passe comme si on échantillonnait la somme des processus de fonctions d'autocorrélation périodiques $\rho_i(\tau) = \sum_k \lambda_{i,k} \cos 2\pi k \tau$, ce qui nous ramène aux paragraphes 7 et 8.

10- Cas d'un échantillonnage à plusieurs discontinuités

10-1 On suppose maintenant que $\ell(x)$ possède les propriétés suivantes :

a) $\ell(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{F(n,x)}{n}$ existe $\forall$ x .

b) $\ell(x)$ est continue sur $[0,1]$ sauf aux points μ_1 , μ_2,.. ..... μ_k auxquels correspondent les sauts $\Delta\mu_1$, $\Delta\mu_2$ ..... $\Delta\mu_k$.

c) $\ell_c(x)$, partie continue de $\ell(x)$ est continuement différentiable par morceaux, et sa dérivée est à variation bornée , ce qui permettra, comme précédemment, toutes les opérations d'interversion des signes de sommation.

A ε donné suffisamment petit , on divise la suite $\{t_i\}$ en $k+1$ sous-suites notées $\{t^0{}_i\}$, $\{t^1{}_i\}$,....., $\{t^k{}_i\}$, l'indice i courant sur N. On note $\{t^m{}_i\}$ $(m \neq 0)$ la sous-suite obtenue par filtrage de la suite $\{t_i\}$ sur $[\mu_m - \varepsilon, \mu_m + \varepsilon]$. On pose $\Delta\mu = \sum_{i=1}^{k} \Delta\mu_i$. Si $n_0, n_1, \ldots$ ... n_k représentent les nombres d'éléments des diverses sous-suites contenus dans les n premiers éléments de la suite $\{t_i\}$, on peut écrire :

$$\text{Var}\,\hat{m}_\infty = \frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^{n} \rho(t_i - t_j) = \frac{n_0^2}{n^2} \frac{1}{n_0^2} \sum_{i,j=1}^{n_0} \rho(t^0{}_i - t^0{}_j)$$

$$+ \frac{1}{n^2} \sum_{\substack{p=1\ldots k \\ q=1\ldots k}} \sum_{\substack{i=1\ldots n \\ j=1\ldots n^p_q}} \rho(t^p{}_i - t^q{}_j)$$

$$+ \frac{2}{n^2} \sum_{q=1}^{k} \sum_{\substack{i=1....n_0 \\ j=1....n_q}} \rho(t^0_i - t^q_j)$$

10-2 L'étude de Var $\hat{m}_n$ n'est que peu différente de celle faite précedemment. Seul, le second terme change , en ce sens qu'il compare les discontinuités entre elles. Supposant, pour simplifier $\rho(\tau) = \cos 2\pi\tau$, il vient aisément :

$$- \lim_{\substack{n\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} \frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^{n_0} \cos 2\pi\ (t^0_i - t^0_j) = \frac{\sigma^2}{4}$$

σ et $2\pi\phi$ représentant le module et l'argument du fondamental de $\frac{d\ell_C}{dx}$ (dans son développement en série de Fourier sur $[0,1]$) .

En effet, comme dans les paragraphes précédents, la suite $\{t^0_i\}$ est bâtie sur la partie continue de $\ell(x)$.

$$- \lim_{\substack{n\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} \frac{1}{n_p\, n_q} \sum_{\substack{i=1....n_p \\ j=1....n_q}} \cos 2\pi\ (t^p_i - t^q_j) = \cos 2\pi(\mu_p - \mu_q)$$

Cette égalité est dûe au fait que $\rho(\tau)$ est continue, et que, en un certain sens, $t^p_i \to \mu_p$ et $t^q_i \to \mu_q$

$$- \lim_{\substack{n\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} \frac{2}{n^2} \sum_{\substack{i=1....n_p \\ j=1....n_q}} \cos 2\pi(t^0_i - t^q_j) = \Delta\mu_q \cos 2\pi(\mu_q - \phi)$$

D'où $\text{Var}\,\hat{m}_\infty = \frac{\sigma^2}{4} + \sigma \sum_{q=1}^{k} \Delta\mu_q \cos 2\pi(\phi-\mu_q) + \sum_{p,q=1}^{k} \Delta\mu_p \Delta\mu_q \cos 2\pi(\mu_p-\mu_q)$

Une condition nécessaire pour que ce trinôme non négatif en σ soit nul est que son discriminant Δ soit nul. Soit :

$$\Delta = \Big[\sum_{q=1}^{k} \Delta\mu_q \cos 2\pi(\phi-\mu_q)\Big]^2 - \sum_{p,q=1}^{k} \Delta\mu_p \Delta\mu_q \cos 2\pi(\mu_p-\mu_q)$$

$$\Delta = -\sum_{p,q=1}^{k} \Delta\mu_p \Delta\mu_q \sin 2\pi(\phi-\mu_p) \sin 2\pi(\phi-\mu_q)\text{, expression}$$

qui se réduit à $\Delta = -\Big(\sum_{p=1}^{k} \Delta\mu_p \sin 2\pi(\phi-\mu_p)\Big)^2$

L'équation $\Delta = 0$ a comme solution $\operatorname{tg} 2\pi\phi = \dfrac{\sum_{p=1}^{k} \Delta\mu_p \sin 2\pi\mu_p}{\sum_{p=1}^{k} \Delta\mu_p \cos 2\pi\mu_p}$

soit :

$$\phi = \Big(\psi_0 + \frac{m}{2}\Big) \bmod 1\text{, } m \in \mathbb{Z}\text{, avec } \psi_0 = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Arctg} \frac{\sum_{p=1}^{k} \Delta\mu_p \sin 2\pi\mu_p}{\sum_{p=1}^{k} \Delta\mu_p \cos 2\pi\mu_p}$$

$\text{Var}\,\hat{m}_\infty$ se réduit alors à $\text{Var}\,\hat{m}_\infty = \frac{1}{4}\Big[\sigma + 2(-1)^m \sum_{q=1}^{k} \Delta\mu_q \cos 2\pi(\phi_0-\mu_q)\Big]^2$

d' où ϕ, σ et m :

$$\phi = \left(\psi_0 + \frac{m}{2} \right) \mod 1$$

$$\sigma = 2 \left| \sum_{q=1}^{k} \Delta\mu_q \cos 2\pi(\psi_0 - \mu_q) \right| = 2 \left[\sum_{p,q=1}^{k} \Delta\mu_p \, \Delta\mu_q \cos 2\pi \, (\mu_p - \mu_q) \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$m \text{ tel que } (-1)^m \sum_{q=1}^{k} \Delta\mu_q \cos 2\pi \, (\psi_0 - \mu_q) \leq 0$$

Reprenant alors les démonstrations du paragraphe 7, il vient :

10-3 Théorème XIII

Si $\rho(\tau) = \cos 2\pi \, \tau$, on peut toujours trouver un échantillonnage convergent dont la fonction de répartition modulo 1 possède k discontinuités telles que

$$\left[\sum_{p,q=1}^{k} \Delta\mu_p \, \Delta\mu_q \cos 2\pi \, (\mu_p - \mu_q) \right]^{\frac{1}{2}} < \frac{1}{2}$$

Dans le cas contraire, l'échantillonnage n'est jamais convergent.

10-4 Remarques

1°) Un tel échantillonnage est équivalent à celui obtenu pour une suite $\{t_i\}$ dont la fonction de répartition modulo 1

$\ell^{(1)}(x) = \ell_C^{(1)}(x) + \ell_D^{(1)}(x)$ est telle que

$\ell_D^{(1)}(x) = 0$ pour $x < \mu^{(1)}$

$\ell_D^{(1)}(x) = \Delta\mu^{(1)}$ pour $x > \mu^{(1)}$

$\frac{d\ell_C^{(1)}(x)}{dx} \in A$, et son fondamental est tel que

$$\sigma = 2\Delta\mu^{(1)} \quad , \quad \phi = \left(\mu^{(1)} + \frac{1}{2}\right) \bmod 1$$

avec $\Delta\mu^{(1)} = \left[\sum_{p,q=1}^{k} \Delta\mu_p \Delta\mu_q \cos 2\pi (\mu_p - \mu_q)\right]^{\frac{1}{2}}$; $\mu^{(1)} \in [0,1[$, et

$$\mu_1 = \frac{1}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{\sum_{p=1}^{k} \Delta\mu_p \sin 2\pi\mu_p}{\sum_{p=1}^{k} \Delta\mu_p \cos 2\pi\mu_p}$$

2°) Dans le cas où $\rho(\tau) = \sum_{q=1}^{\infty} \lambda_q \cos 2\pi q \tau$, on obtient :

$$\operatorname{Var} \hat{\bar{m}}_\infty = \frac{1}{4} \sum_{q=1}^{k} \lambda_q \left[\sigma_q^2 + 4\sigma_q \sum_{m=1}^{k} \cos 2\pi q(\phi_q - \mu_m) + 4 \sum_{m,n=1}^{k} \Delta\mu_m \Delta\mu_n \cos 2\pi q(\mu_m - \mu_n) \right]$$

Tous les trinômes entre crochets étant définis non négatifs, il s'ensuit que la condition de convergence devient :

$$\sum_{m=1}^{k} \Delta\mu_m \cos 2\pi q (\phi_q - \mu_m) = 0$$

$$\sigma_q = 2 \left| \sum_{m=1}^{k} \Delta\mu_m \cos 2\pi q(\phi_q - \mu_m) \right| = 2 \left[\sum_{m,n=1}^{k} \Delta\mu_m \Delta\mu_n \cos 2\pi q (\mu_m - \mu_n) \right]^{\frac{1}{2}}$$

avec ϕ_q tel que $\sum_{m=1}^{k} \Delta\mu_m \cos 2\pi q(\phi_q - \mu_m) \leq 0$

pour tout q tel que $\lambda_q \neq 0$

Nous ne développerons pas davantange la théorie des échantillonnages à plusieurs discontinuités, car les conditions de convergence deviennent déjà inexploitables, en ce sens que l'on devrait raisonner non seulement sur la hauteur des divers sauts $\Delta\mu_m$, mais encore sur les abscisses μ_m de ces sauts ; on voit donc que le problème devient inextricable. Dans le cas d'un processus presque périodique, on raisonne comme dans le paragraphe 9 , c'est à dire que l'on décompose $\rho(\tau)$ en ses composantes périodiques. Enfin, on obtient des résultats identiques avec des hypothèses moins restrictives sur $\ell_C(x)$ (voir chapitre III § 4 et 5).

C H A P I T R E - V -

CONVERGENCE DE $\hat{m}_n$ LORSQUE

$\rho(\tau)$ EST PRESQUE PERIODIQUE

$\ell(x)$ A UN NOMBRE FINI DE POINTS

D'ACCUMULATION DE DISCONTINUITES

1- Introduction

Nous désirons ici étendre les résultats du chapitre précédent dans le cas où l'ensemble des discontinuités de la suite d'échantillonnage comporte des points d'accumulation.

Pour simplifier, et sans perte de généralité, on se place dans le cas où $\rho(\tau)$ est périodique de période 1 ; on étudie donc les propriétés modulo 1 de la suite d'échantillonnage $\{t_i\}$. Soit $\ell(x)$ sa fonction de répartition modulo 1; μ_1 , μ_2..... μ_n.... suite de ses discontinuités qui converge vers μ . Les sauts correspondants ont comme amplitude $\Delta\mu_1$, $\Delta\mu_2$,..... $\Delta\mu_n$....., et la somme des sauts est $\Delta\mu$.

On note $\ell_C(x)$ la partie continue de $\ell(x)$. Comme dans les chapitres précédents , $\frac{d\ell_C}{dx}$ est supposée continue par morceaux et à variation bornée. D_∞ est l'ensemble des échantillonnages ainsi définis (avec les suites $\{\mu_i\}$ et $\{\Delta\mu_i\}$ données).

2- Expression de Var $\hat{m}_n$

Soit $\varepsilon > 0$ donné aussi petit que l'on veut, de manière à ce que $\mu_k \neq \mu-\varepsilon$, $\mu_k \neq \mu + \varepsilon$, $\forall$ k . On peut décomposer la suite $\{t_i\}$ en $p_\varepsilon + 1$ sous-suites, par filtrage, de la manière suivante :

- la sous-suite $\{\alpha_i\}$ est l'ensemble des éléments de la

suite $\{t_i\}$ qui appartiennent à $[\mu-\varepsilon\ ,\ \mu+\varepsilon[$.

- une fois extraite $\{\alpha_i\}$, la suite restante notée $\{t_i\}-\{\alpha_i\}$ a la propriété suivante : on peut trouver $\varepsilon' > 0$ tel que $[\mu_k - \varepsilon'\ ,\ \mu_k+\varepsilon'[$ ne contienne que la discontinuité $\mu_k \notin [\mu-\varepsilon\ ,\ \mu+\varepsilon[$. En effet, si cette propriété n'était pas vraie, c'est qu'un des points $\mu_m \notin [\mu-\varepsilon\ ,\ \mu+\varepsilon[$, $\mu-\varepsilon$ ou $\mu+\varepsilon$ est point d'accumulation de discontinuités, ce qui est contraire à la définition de $\ell(x)$. ε' étant choisi aussi petit que l'on veut, on filtre la suite $\{t_i\} - \{\alpha_i\}$ autour de ses $p_\varepsilon - 1$ discontinuités, sur des intervalles de la forme $[\mu_k - \varepsilon'\ ,\ \mu_k + \varepsilon'[$. On note $\{\beta_i^m\}$, $m = 1,2\ldots.,\ p_\varepsilon - 1$, ces diverses suites, de fonction de répartition $\ell_\beta^m(x)$.

Enfin, il reste une suite $\{\gamma_i\}$, dont la fonction de répartition $\ell_\gamma(x)$ est continue, et dépend de ε et ε' .

On peut alors écrire, $\rho(\tau)$ étant une fonction paire :

$$\operatorname{Var}\hat{m}_n = \frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{q_n}\rho(\gamma_i-\gamma_j) + \frac{1}{n^2}\sum_{m=1}^{p_\varepsilon-1}\sum_{i,j=1}^{r_n^m}\rho(\beta_i^m-\beta_j^m) + \frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{s_n}\rho(\alpha_i-\alpha_j)$$

$$+\frac{2}{n^2}\sum_{m=1}^{p_\varepsilon-1}\sum_{\substack{i=1\ldots q_n\\ j=1\ldots r_n^m}}\rho(\gamma_i-\beta_j^m) + \frac{2}{n^2}\sum_{\substack{i=1\ldots q_n\\ j=1\ldots s_n}}\rho(\gamma_i-\alpha_j)$$

$$+\frac{2}{n^2}\sum_{m=1}^{p_\varepsilon-1}\sum_{\substack{i=1\ldots r_n^m\\ j=1\ldots s_n}}\rho(\beta_i^m-\alpha_j) + \frac{1}{n^2}\sum_{\substack{m=1\ldots p_\varepsilon-1\\ m'=1\ldots p_\varepsilon-1\\ m\neq m'}}\sum_{\substack{i=1\ldots r_n^m\\ j=1\ldots r_n^{m'}}}\rho(\beta_i^m-\beta_j^{m'})$$

Var $\hat{m}_n$ dépend de n, ε et ε' , ε' étant lié à ε car ces deux paramètres tendent vers 0 en même temps, puisque μ est un point d'accumulation de discontinuités.

La difficulté du calcul de Var $\hat{m}_\infty$, vient du fait que le nombre de suites $\{\beta_j^m\}$ augmente indéfiniment lorsque ε tend vers 0, et qu'ainsi quatre paramètres, à savoir n, p_ε , ε et ε' varient simultanément (p_ε , ε, ε') ou séparément (n) , et tendent vers une limite (0 pour ε et ε') , ou augmentent indéfiniment (p_ε , n) .

Pour simplifier les notations et éclaircir les idées, on écrit Var $\hat{m}_n$ sous la forme :

$$\text{Var } \hat{m}_n = \left(\frac{q_n}{n}\right)^2 A_\gamma(n,\varepsilon) + \sum_{m=1}^{p_\varepsilon-1} \left(\frac{r_n^m}{n}\right)^2 A_\beta^m(n,\varepsilon) + \left(\frac{s_n}{n}\right)^2 A_\alpha(n,\varepsilon)$$

$$+ 2 \sum_{m=1}^{p_\varepsilon-1} \frac{q_n r_n^m}{n^2} A_{\gamma\beta}^m(n,\varepsilon) + 2 \frac{q_n s_n}{n^2} A_{\gamma\alpha}(n,\varepsilon) + 2 \sum_{m=1}^{p_\varepsilon-1} \frac{r_n^m s_n}{n^2} A_{\beta\alpha}^m(n,\varepsilon)$$

$$\sum_{\substack{m=1\ldots p_\varepsilon-1 \\ m'=1\ldots p_\varepsilon-1 \\ m\neq m'}} \frac{r_n^m r_n^{m'}}{n^2} A_\beta^{m,m'}(n,\varepsilon) \qquad (1)$$

3- Calcul de Var $\hat{m}_\infty$

3-1 Pour simplifier l'exposé, nous supposerons que $\ell_C(x)$

est non identiquement nulle sur $[0,1]$, et que $\mu \neq 0$ et 1 . Le résultat final est de toute façon indépendant de ces hypothèses.

De la même manière, on peut supposer que la suite μ_i est ordonnée (ce qui ne veut pas dire que la suite $\Delta\mu_i$ le soit) . μ étant éventuellement une discontinuité, on notera $\Delta\mu_\infty$ le saut correspondant.

Sous ces nouvelles conventions, la suite des $\Delta\mu_i$ ($\Delta\mu_\infty$ non compris) converge vers 0. Pour commencer, on peut calculer les diverses limites $\frac{q_n}{n}$, $\frac{r_n}{n}$ . . .

Il vient aisément, par définition des diverses sous-suites .

$$\lim_{n\to\infty} \frac{q_n}{n} = 1 - [\ell(\mu+\varepsilon) - \ell(\mu-\varepsilon)] - \sum_{k=1}^{p_\varepsilon - 1} [\ell(\mu_k+\varepsilon') - \ell(\mu_k-\varepsilon')]$$

que l'on écrit $\lim_{n\to\infty} \frac{q_n}{n} = 1 - \Delta\mu_\infty^{\varepsilon} - \sum_{k=1}^{p_\varepsilon - 1} \Delta\mu_k^{\varepsilon'} = 1 - \Delta\mu^{\varepsilon,\varepsilon'}$

d'où $\lim_{n\to\infty} \frac{r_n^m}{n} = \Delta\mu_m^{\varepsilon'}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{n} = \Delta\mu_\infty^{\varepsilon} \qquad (2)$$

3-2 Expression de $A_\gamma(\infty, 0)$

3- 2- 1- On peut écrire, par définition de la suite $\{\gamma_i\}$:

$$\ell_\gamma(x) = \frac{1}{1 - \Delta\mu^{\varepsilon,\varepsilon'}} \ell(x) \qquad \text{si } x \in [0, \mu_1 - \varepsilon'[\qquad (I_1)$$

$$\ell_\gamma(x) = \frac{1}{1 - \Delta\mu^{\varepsilon,\varepsilon'}} \left[\ell(x) - \sum_{j=1}^{i} \Delta\mu^{\varepsilon'}_j\right] \qquad \text{si } x \in [\mu_i + \varepsilon' , \mu_{i+1} - \varepsilon'[\quad i < p_\varepsilon - 1 \qquad (I_2)$$

$$\ell_\gamma(x) = \ell_\gamma(\mu_{i+1} - \varepsilon') \qquad \text{si } x \in [\mu_{i+1} - \varepsilon' , \mu_{i+1} + \varepsilon'[\qquad (I_3)$$

$$\ell_\gamma(x) = \frac{1}{1 - \Delta\mu^{\varepsilon,\varepsilon'}} \left[\ell(x) - \sum_{j=1}^{p_\varepsilon - 1} \Delta\mu^{\varepsilon'}_j\right] \qquad \text{si } x \in [\mu_{p_\varepsilon - 1} + \varepsilon' , \mu - \varepsilon[\qquad (I_4)$$

$$\ell_\gamma(x) = \ell_\gamma(\mu - \varepsilon) \qquad \text{si } x \in [\mu - \varepsilon , \mu + \varepsilon[\qquad (I_5)$$

$$\ell_\gamma(x) = \frac{1}{1 - \Delta\mu^{\varepsilon,\varepsilon'}} \left[\ell(x) - \Delta\mu^{\varepsilon,\varepsilon'}\right] \qquad \text{si } x \in [\mu + \varepsilon , 1] \qquad (I_6)$$

(3)

$\ell_\gamma(x)$ est ainsi continue et continuement différentiable par morceaux comme $\ell_c(x)$, partie continue de $\ell(x)$.

Lorsque ε tend vers 0 , $\ell_\gamma(x)$ tend vers $L_\gamma(x) = \dfrac{\ell_c(x)}{1 - \Delta\mu}$.

On peut d'ailleurs démontrer que cette convergence est uniforme.

Pour cela, on considère $L_\gamma(x) - \ell_\gamma(x)$ sur chacun des intervalles I_k ($k = 1.....6$) définis dans la formule (3) .

Dans I_1 : $L_\gamma(x) - \ell_\gamma(x) = \ell_C(x) \left[\frac{1}{1 - \Delta\mu} - \frac{1}{1 - \Delta\mu^{\varepsilon,\varepsilon'}} \right]$

$$|L_\gamma(x) - \ell_\gamma(x)| \leq \frac{1}{1 - \Delta\mu^{\varepsilon,\varepsilon'}} - \frac{1}{1 - \Delta\mu} \qquad (4\text{-}1)$$

$$I_2 : L_\gamma(x) - \ell_\gamma(x) = \frac{1}{1-\Delta\mu} \left[\ell(x) - \sum_{j=1}^{i} \Delta\mu_j\right] - \frac{1}{1-\Delta\mu^{\varepsilon,\varepsilon'}} \left[\ell(x) - \sum_{j=1}^{i} \Delta\mu_j^{\varepsilon'}\right]$$

$$= \ell(x)\left[\frac{1}{1- \Delta\mu} - \frac{1}{1 - \Delta\mu^{\varepsilon,\varepsilon'}}\right] + \frac{1}{1 - \Delta\mu} \left[\sum_{j=1}^{i} (\Delta\mu_j^{\varepsilon'} - \Delta\mu_j)\right]$$

$$-\left[\frac{1}{1 - \Delta\mu} - \frac{1}{1 - \Delta\mu^{\varepsilon,\varepsilon'}}\right] \sum_{j=1}^{i} \Delta\mu_j^{\varepsilon'}$$

$$|L_\gamma(x) - \ell_\gamma(x)| \leq 2 \left|\frac{1}{1-\Delta\mu} - \frac{1}{1 - \Delta\mu^{\varepsilon,\varepsilon'}}\right| + \frac{1}{1-\Delta\mu} \sum_{j=1}^{i} \left[\ell_C(\mu_j+\varepsilon') - \ell_C(\mu_j-\varepsilon')\right]$$

(4-2)

$$I_3 : L_\gamma(x) - \ell_\gamma(x) = \frac{1}{1-\Delta\mu} \left[\ell(x) - \sum_{j=1}^{i \text{ ou } i+1} \Delta\mu_j\right] - \frac{1}{1 - \Delta\mu^{\varepsilon,\varepsilon'}} \left[\ell(\mu_{i+1}-\varepsilon') - \sum_{j=1}^{i} \Delta\mu_j^{\varepsilon'}\right]$$

une des sommations portant sur i ou i+1 suivant que x est supérieur ou inférieur à μ_{i+1} .

De toute façon :

$$L_\gamma(x) - \ell_\gamma(x) = \frac{1}{1-\Delta\mu}\,\ell_C(x) - \frac{1}{1-\Delta\mu^{\varepsilon,\varepsilon'}}\,\ell_C(\mu_{i+1} - \varepsilon')$$

$$|L_\gamma(x) - \ell_\gamma(x)| \leq \frac{1}{1-\Delta\mu}\,[\ell_C(x) - \ell_C(\mu_{i+1} - \varepsilon')] + \left|\frac{1}{1-\Delta\mu} - \frac{1}{1-\Delta\mu^{\varepsilon,\varepsilon'}}\right|$$

$$I_4 : |L_\gamma(x) - \ell_\gamma(x)| \leq 2\left|\frac{1}{1-\Delta\mu} - \frac{1}{1-\Delta\mu^{\varepsilon,\varepsilon'}}\right| + \frac{1}{1-\Delta\mu}\sum_{j=1}^{p_\varepsilon-1}[\ell_C(\mu_j+\varepsilon') - \ell_C(\mu_j-\varepsilon')] \qquad (4\text{-}4)$$

Il suffit ici de remplacer i par $p_\varepsilon - 1$ dans l'expression valable pour I_2

$$I_5 : |L_\gamma(x) - \ell_\gamma(x)| \leq \frac{1}{1-\Delta\mu}\,[\ell_C(x) - \ell_C(\mu-\varepsilon)] + \left|\frac{1}{1-\Delta\mu} - \frac{1}{1-\Delta\mu^{\varepsilon,\varepsilon'}}\right| \qquad (4\text{-}5)$$

$$I_6 : |L_\gamma(x) - \ell_\gamma(x)| \leq \frac{1}{1-\Delta\mu^{\varepsilon,\varepsilon'}} - \frac{1}{1-\Delta\mu} \qquad (4\text{-}6)$$

Pour démontrer la convergence uniforme de $\ell_\gamma(x)$ vers $L(x)$, il faut trouver ε et ε' tels que les expressions 4-1...4-6 soient simultanément majorées par ε_1 aussi petit que l'on veut, indépendamment de x . Ce qui revient à vérifier les inégalités

$$\ell_C(x) - \ell_C(\mu - \varepsilon) < \varepsilon_1$$

$$\sum_{j=1}^{p_\varepsilon - 1}[\ell_C(\mu_j + \varepsilon') - \ell_C(\mu_j - \varepsilon')] < \varepsilon_1$$

$$\text{et} \quad \frac{1}{1-\Delta\mu^{\varepsilon,\varepsilon'}} - \frac{1}{1-\Delta\mu} < \varepsilon_1$$

$\ell_C(x)$ est continue par définition, donc uniformément continue sur $[0,1]$

On écrit donc :

$$\forall\ \varepsilon_1 > 0\ ,\ \exists\ \eta(\varepsilon_1,\varepsilon)\ \text{ tel que }\ |x - x_0| < \eta \Rightarrow |\ell_C(x) - \ell_C(x_0)| < \frac{\varepsilon_1}{p_\varepsilon - 1}$$

ce qui vérifie les deux premières inégalités, (4-1 et 4-2) à condition de prendre ε et ε' inférieurs à η , ce qui est toujours possible.

D'autre part, d'après (2) :

$$\Delta\mu^{\varepsilon,\varepsilon'} - \Delta\mu = \sum_{k=1}^{p_\varepsilon - 1} [\ell_C(\mu_k + \varepsilon') - \ell_C(\mu_k - \varepsilon')] + \ell_C(\mu+\varepsilon) - \ell_C(\mu-\varepsilon)$$

d'où $\Delta\mu^{\varepsilon,\varepsilon'} - \Delta\mu < 3\varepsilon_1$, ce qui démontre la convergence uniforme .

3-2-2 $\ell_\gamma(x)$, fonction de répartition de $\{\gamma_i\}$ étant continue on peut écrire (voir chap.III, § 2-2-2)

$$\ell_{\gamma\gamma}(x) = \int_0^1 \ell_\gamma\left[(x+u)_{\bmod 1}\right]\, d\ell_\gamma(u) + \frac{1}{2} - \ell_\gamma(1-x),\ \forall\ x \in [0,1] \qquad (5)$$

$\ell_{\gamma\gamma}(x)$ étant la fonction de répartition de la suite $\{\gamma_i - \gamma_j\}_{i,j \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}}$

De la continuité de $\ell_\gamma(x)$ et de sa convergence (uniforme) vers $L_\gamma(x)$, il s'ensuit que $\ell_{\gamma\gamma}(x)$ converge (uniformément) vers $L_{\gamma\gamma}(x)$, continue et définie par :

$$L_{\gamma\gamma}(x) = \int_0^1 L_\gamma\left[(x+u)_{\bmod 1}\right]\, dL_\gamma(u) + \frac{1}{2} - L_\gamma(1-x)$$

$$\forall\ x \in [0,1]$$

Si, enfin, $\rho(\tau)$ est périodique de période 1 , il vient :

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\ \lim_{n\to\infty} \quad A_\gamma(n,\varepsilon) = \int_0^1 \rho(x)\, dL_{\gamma\gamma}(x) \quad , \qquad (6)$$

expression que nous expliciterons par la suite.

- 3-3 Expression de $A_\beta^m(\infty,0)$ et $A_\alpha(\infty,0)$

3-3-1 $$A_\beta^m(n,\varepsilon) = \frac{1}{(r_n^m)^2} \sum_{i,j=1}^{r_n^m} \rho(\beta_i^m - \beta_j^m)$$

La suite $\{\beta_i^m\}$ provient du filtrage de la suite $\{t_i\}$ sur

$$[\mu_m - \varepsilon' , \mu_m + \varepsilon'[\text{ , donc } (\beta_i^m - \beta_j^m)_{\bmod 1} \in [0,2\varepsilon'[\cup]1-2\varepsilon' , 1[$$

Comme $\rho(\tau)$ est continue , $\rho(\beta_i^m - \beta_j^m) \in]\rho(2\varepsilon') , \rho(0)]$, $\rho(2\varepsilon')$ pouvant être pris aussi près que l'on veut de $\rho(0)$. Il s'ensuit que

$$A_\beta^m(n,\varepsilon) \in]\rho(2\varepsilon') , \rho(0)] \qquad \forall\ n , \forall\ m .$$

$$\rho(2\varepsilon') \sum_{m=1}^{p_\varepsilon-1} \frac{r_n^m}{n} < \sum_{m=1}^{p_\varepsilon-1} \left(\frac{r_n^m}{n}\right)^2 A_\beta^m(n,\varepsilon) \le \rho(0) \sum_{m=1}^{p_\varepsilon-1} \left(\frac{r_n^m}{n}\right)^2$$

Lorsque $n\to\infty$, $\left(\frac{r_n^m}{n}\right) \to \Delta\mu_m^{\varepsilon'}$, donc :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{p_\varepsilon-1} \left(\frac{r_n^m}{n}\right)^2 A_\beta(n,\varepsilon) \in]\rho(2\varepsilon') \sum_{m=1}^{p_\varepsilon-1} (\Delta\mu_m^{\varepsilon'})^2 , \rho(0) \sum_{m=1}^{p_\varepsilon-1} (\Delta\mu_m^{\varepsilon'})^2]$$

(7)

Nous devons maintenant calculer $\lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{m=1}^{p_\varepsilon-1} (\Delta\mu_m^{\varepsilon'})^2$. Considérons pour cela la somme $S(\varepsilon) = \sum_{m=1}^{p_\varepsilon-1} (\Delta\mu_m^{\varepsilon'})^2 + \Delta\mu_\infty^{\varepsilon}$. Lorsque ε tend vers 0 , le terme $\Delta\mu_\infty^{\varepsilon}$ converge vers $\Delta\mu_\infty$: en effet, la série de terme général $\Delta\mu_m$ est convergente , d'où :

$$\forall\ \varepsilon_1 > 0\ ,\ \exists\ q(\varepsilon_1) \text{ tel que } \quad p > q \Longrightarrow \sum_{m=p}^{\infty} \Delta\mu_m < \varepsilon_1$$

De plus, on peut écrire $\Delta\mu_\infty^{\varepsilon} = \ell_C(\mu+\varepsilon) - \ell_C(\mu-\varepsilon) + \sum_{m=p_\varepsilon}^{\infty} \Delta\mu_m + \Delta\mu_\infty$

Lorsque ε tend vers 0 , d'une part, il en est de même de $\ell_C(\mu+\varepsilon) - \ell_C(\mu-\varepsilon)$, puisque $\ell_C(x)$ est une fonction continue ; d'autre part, p_ε peut être alors pris aussi grand que l'on veut, ce qui entraîne que le terme $\sum_{m=p_\varepsilon}^{\infty} \Delta\mu_m$ est lui aussi arbitrairement petit.

Enfin, il est décisif de remarquer que, ε donné, ε' est arbitrairement petit. Il s'ensuit que $\sum_{m=1}^{p_\varepsilon-1} \Delta\mu_m^{\varepsilon}$ est arbitrairement près de $\sum_{m=1}^{p_\varepsilon-1} \Delta\mu_m + \Delta\mu_\infty^{\varepsilon}$, terme qui, en prenant ε suffisamment petit (c'est à dire p_ε grand) est lui-même arbitrairement près de $\sum_{m=1}^{\infty} \Delta\mu_m + \Delta\mu_\infty = \mu_\infty$

On en conclut que $\lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{m=1}^{p_\varepsilon-1} \Delta\mu_m^{\varepsilon'} = \sum_{m=1}^{\infty} \Delta\mu_m$

Reportant dans (7), et sachant que $\lim_{\varepsilon\to 0} \rho(2\varepsilon') = \rho(0)$, il vient :

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\ \lim_{n\to\infty}\ \sum_{m=1}^{p_\varepsilon - 1} \left(\frac{r_n^m}{n}\right)^2 A_\beta(n,\varepsilon) = \rho(0) \sum_{m=1}^{\infty} (\Delta\mu_m)^2 \qquad (8)$$

3-3-2 $$A_\alpha(n,\varepsilon) = \frac{1}{s_n^2} \sum_{i,j=1}^{s_n} \rho(\alpha_i - \alpha_j)$$

La suite $\{\alpha_i\}$ est obtenue par filtrage sur $[\mu-\varepsilon\ ,\ \mu+\varepsilon[$. Comme dans le § 3-3-1 , $(\alpha_i - \alpha_j)_{\bmod 1} \in\ ]\rho(2\varepsilon)\ ,\ \rho(0)]$, avec $\lim_{\varepsilon\to 0} \rho(2\varepsilon) = \rho(0)$

Donc $\frac{1}{s_n^2} \sum_{i,j=1}^{s_n} \rho(\alpha_i - \alpha_j) \in\ ]\rho(2\varepsilon)\ ,\ \rho(0)], \forall n$.

et $\lim_{\varepsilon\to 0}\ \lim_{n\to\infty} A_\alpha(n,\varepsilon) = \rho(0)$, l'ordre des limites pouvant être inversé .

3-4 Expression de $A^m_{\gamma\beta}(\infty,0)$ et $A_{\gamma\alpha}(\infty,0)$

3-4-1 Rappels

Etant donnée $\ell_\gamma(x)$, fonction de répartition continue et continuement différentiable par morceaux de la suite $\{\gamma_i\}$, la fonction de répartition $\ell_{\gamma y}(x)$ de la suite $\{\gamma_i - y\}$ est telle que

1) $\ell_{\gamma y}(x)$ existe $\forall\ x \in [0,1]$

2) $\ell_{\gamma y}(x)$ est continue et continuement différentiable par morceaux .

3) $\frac{1}{n} F_{\gamma\gamma}(n,x)$ converge uniformément vers $\ell_{\gamma\gamma}(x)$ par rapport au couple $(x,y) \in R \times R$. (voir Chapitre III §2-2-1 et Chapitre IV § 6-2) .

Si l'on considère la suite $\{\delta_i\}$ de fonction de répartition $\ell_\delta(x)$, et la composition $\{\gamma_i - \delta_j\}_{i,j \in N \times N}$ on sait calculer $\ell_{\gamma\delta}(x)$, fonction de répartition de cette dernière suite (voir chapitre IV , § 6-3). Même si $\ell_\delta(x)$ comporte des discontinuités, $\ell_{\gamma\delta}(x)$ est continue. D'autre part, si $\ell_\delta(x)$ converge vers $L_\delta(x)$ nulle pour $x < a$ et égale à 1 pour $x > a$, $\ell_{\gamma\delta}(x)$ converge **uniformément vers** $L_{\gamma\delta}(x)$ continue, définie par :

$$dL_{\gamma\delta}(x) = dL_\gamma \left[(x+a)_{\text{mod } 1}\right]$$

ce qui entraîne que $L_{\gamma\delta}(x)$ est continuement différentiable par morceaux si $L_\gamma(x)$ l'est.

$$\underline{3\text{-}4\text{-}2} \quad A^m_{\gamma\beta}(n,\varepsilon) = \frac{1}{q_n r_n^m} \sum_{\substack{i=1,\dots,q_n \\ j=1,\dots,r_n^m}} \rho(\gamma_i - \beta_j^m)$$

A m donné, $\ell^m_{\gamma\beta}(x)$, la fonction de répartition de la suite $\{\gamma_i - \beta_j^m\}_{i,j \in N \times N}$ converge donc vers $L^m_{\gamma\beta}(x)$ telle que $dL^m_{\gamma\beta}(x) = dL_\gamma \left[(x+\mu_m)_{\text{mod } 1}\right]$

$$\text{d'où} \quad \lim_{\varepsilon\to 0} \lim_{n\to\infty} A^m_{\gamma\beta}(n,\varepsilon) = \int_0^1 \rho(x)\, dL_\gamma \left[(x+\mu_m)_{\bmod 1}\right] \qquad (9)$$

Nous désirons maintenant sommer ce résultat sur l'indice m, en pondérant chaque terme par $\frac{q_n r_n^m}{n^2} \cdot |A^m_{\gamma\beta}(n,\varepsilon)|$ est majorée par $\rho(0)$;

il découle de ceci, que, comme dans § 3-3-1 , on peut rendre aussi petites que l'on veut les sommes du type $\sum_{m'}^{m''} \frac{q_n r_n^m}{n^2} A^m_{\gamma\beta}(n,\varepsilon)$, à condition que m et m' soient suffisamment grands, c'est à dire ε petit. En conséquence :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{p_\varepsilon - 1} \frac{q_n r_n^m}{n^2} A^m_{\gamma\beta}(n,\varepsilon) = (1-\Delta\mu) \sum_{m=1}^{\infty} \Delta\mu_m \int_0^1 \rho(x)\, dL_\gamma \left[(x+\mu_m)_{\bmod 1}\right] \qquad (10)$$

$$\underline{3\text{-}4\text{-}3} \quad A_{\gamma\alpha}(n,\varepsilon) = \frac{1}{q_n s_n} \sum_{\substack{i=1\ldots q_n \\ j=1\ldots s_n}} \rho(\gamma_i - \alpha_j)$$

Reprenant la première partie du paragraphe précédent, on obtient :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \lim_{n\to\infty} A_{\gamma\alpha}(n,\varepsilon) = \int_0^1 \rho(x)\, dL_\gamma \left[(x+\mu)_{\bmod 1}\right] \qquad (11)$$

3-5 Expression de $A^m_{\beta\alpha}(\infty,0)$

$$A^m_{\beta\alpha}(n,\varepsilon) = \frac{1}{r_n^m s_n} \sum_{\substack{i=1\ldots r_n^m \\ j=1\ldots s_n}} \rho(\beta_i^m - \alpha_j)$$

En quelque sorte, on compare maintenant les discontinuités entre elles. Puisque $\beta_i^m \in [\mu_m - \varepsilon' , \mu_m + \varepsilon'[$, $\alpha_j \in [\mu-\varepsilon, \mu+\varepsilon[$ et $\mu_m < \mu$, on en déduit : $(\beta_i^m - \alpha_j)_{\bmod 1} \in [1 + \mu_m - \mu - \varepsilon - \varepsilon' ,$

$1 + \mu_m - \mu + \varepsilon + \varepsilon'[$, intervalle de largeur $\varepsilon + \varepsilon'$; lorsque $\varepsilon + \varepsilon'$ tend vers 0 en même temps que ε, $\rho(\beta_i^m - \alpha_j)$ prend des valeurs proches de $\rho(\mu-\mu_m)$, puisque $\rho(\tau)$ est périodique et continue . Pour les raisons évoquées plus haut (§ 3-3-1 et 3-4-2), et puisque $\rho(\tau)$ est majorée par $\rho(0)$, on peut écrire successivement :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{r_n^m s_n} \sum_{\substack{i=1,\dots r_n^m \\ j=1,\dots s_n}} \rho(\beta_i^m - \alpha_j) = \rho(\mu_m - \mu)$$

et
$$\lim_{\varepsilon\to 0} \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{p_\varepsilon - 1} \frac{r_n^m s_n}{n^2} A_{\beta\alpha}^m (n,\varepsilon) = \Delta\mu_\infty \sum_{m=1}^{\infty} \Delta\mu_m \rho(\mu - \mu_m) \qquad (12)$$

3-6 Expression de $A_\beta^{m,m'}(\infty,0)$

$$A_\beta^{m,m'}(n,\varepsilon) = \frac{1}{r_n^m r_n^{m'}} \sum_{\substack{i=1\dots r_n^m \\ j=1\dots r_n^{m'}}} \rho(\beta_i^m - \beta_j^{m'}) , \quad m \neq m' .$$

Par définition $\beta_i^m \in [\mu_m - \varepsilon' , \mu_m + \varepsilon'[$ d'où

$$\rho(\beta_i^m - \beta_j^{m'}) \in \left]\rho(|\mu_m - \mu_{m'}| \pm 2\varepsilon'),\ \rho(|\mu_m - \mu_{m'}| \pm 2\varepsilon')\right[$$

et $A_\beta^{m,m'}(n,\varepsilon) \in \left]\rho(|\mu_m - \mu_{m'}| \pm 2\varepsilon'),\ \rho(|\mu_m - \mu_{m'}| \pm 2\varepsilon')\right[$, $\forall$ n.

Comme $\rho(\tau)$ est continue et paire : $\lim_{\varepsilon\to 0} A_\beta^{m,m'}(n,\varepsilon) = \rho(\mu_m - \mu_{m'})$

Il est maintenant nécessaire de sommer $A_\beta^{m,m'}$ sur les indices m et m' ($m \neq m'$), avec les poids $\dfrac{r_n^m\, r_n^{m'}}{n^2}$

On peut écrire le dernier terme de (1) sous la forme :

$$\sum_{m=1\ldots p_\varepsilon - 1} \frac{r_n^m}{n} \sum_{\substack{m'=1\ldots p_\varepsilon - 1 \\ m' \neq m}} \frac{r_n^{m'}}{n} A_\beta^{m,m'}(n,\varepsilon)$$

La seconde somme est uniformément bornée, par exemple par $\rho(0)$. Il s'ensuit que l'on peut écrire, comme dans les paragraphes précédents :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{m=1\ldots p_\varepsilon - 1 \\ m'=1\ldots p_\varepsilon - 1 \\ m \neq m'}} \frac{r_n^m\, r_n^{m'}}{n^2} A_\beta^{m,m'}(n,\varepsilon) = \sum_{\substack{m,m'=1 \\ m \neq m'}}^{\infty} \Delta\mu_m\, \Delta\mu_{m'}\, \rho(\mu_m - \mu_{m'})$$

3-7 D'où Var $\hat{m}_\infty$

On peut déduire Var $\hat{m}_\infty$ des expressions (1) , (6) , (8), (9), (10) , (11) , (12) , et (13) . En effet, l'expression (1) est une égalité valable quelque soit ε, ε' , donc en particulier lorsque ε tend vers 0 .

Encore faut-il, soit que les diverses limites données par les formules (6) , (8) ..... concernent les mêmes intervalles de définition de ε et ε' soit que les expressions $A_\gamma(\infty,\cap)$, $A_\beta(\infty,\cap)$..,convergent lorsque ε et ε' tendent vers 0. La prerière de ces conditions se vérifie aisément. Il vient donc :

$$\text{Var } \hat{f}_\infty = (1-\Delta\mu)^2 \int_0^1 \rho(x)\, dL_{\gamma\gamma}(x) + 2(1-\Delta\mu) \sum_{m=1}^{\infty} \Delta\mu_m \int_0^1 \rho(x)\, dL_\gamma \left[(x+\mu_m)_{\text{mod } 1}\right]$$

$$+ 2\Delta\mu_\infty \sum_{m=1}^{\infty} \Delta\mu_m\, \rho(\mu-\mu_m) + \sum_{\substack{m,m'=1 \\ m\neq m'}}^{\infty} \Delta\mu_m\, \Delta\mu_{m'}\, \rho(\mu_m-\mu_{m'})$$

$$+ 2(1-\Delta\mu)\Delta\mu_\infty \int_0^1 \rho(x) dL_\gamma \left[(x+\mu)_{\text{mod } 1}\right] + \rho(0) \left[(\Delta\mu_\infty)^2 + \sum_{m=1}^{\infty} (\Delta\mu_m)^2\right] \quad (14)$$

$$\text{avec } L_{\gamma\gamma}(x) = \int_0^1 L_\gamma \left[(x+u)_{\text{mod } 1}\right] dL_\gamma(u) + \frac{1}{2} - L_\gamma(1-x) \ , \ \forall\, x \in [0,1],$$

d'après (5)

$$\text{et } L_\gamma(x) = \frac{\ell_C(x)}{1-\Delta\mu}$$

4- Cas particulier : $\rho(\tau) = \cos 2\pi\tau$

$$\text{On pose } \frac{d\ell_C(x)}{dx} = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k \cos 2\pi k(x-\phi_k)$$

En reportant les expressions de $\rho(\tau)$ et $\frac{d\ell_C}{dx}$ dans (5) , et (14) , on obtient :

$$\frac{dL_{\gamma\gamma}(x)}{dx} = \frac{1}{(1-\Delta\mu)^2}\left[\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_k^2\cos 2\pi kx + \sigma_0^2\right]$$

$$\text{et Var}\,\hat{m}_\infty = \frac{\sigma_1^2}{4} + \sigma_1\left[\sum_{n=1}^{\infty}\Delta\mu_n\cos 2\pi(\phi_1-\mu_n) + \Delta\mu_\infty\cos 2\pi(\phi_1-\mu)\right]$$

$$+ (\Delta\mu_\infty)^2 + \sum_{m=1}^{\infty}(\Delta\mu_m)^2 + \Delta\mu_\infty\sum_{m=1}^{\infty}\Delta\mu_m\cos 2\pi(\mu-\mu_m)$$

$$+ \sum_{\substack{m,m'=1\\ m\neq m'}}\Delta\mu_m\Delta\mu_{m'}\cos 2\pi(\mu_m-\mu_{m'}) \qquad (15)$$

L'expression obtenue est le passage à la limite de celle démontrée dans le chapitre IV , § 10 . Comme les séries qui rentrent dans l'expression de Var $\hat{m}_\infty$ sont absolument convergentes, et que donc toutes les opérations sur ces séries sont possibles, il s'ensuit que l'on peut directement étendre les résultats obtenus pour un échantillonnage comportant un nombre fini de discontinuites. L'estimateur $\hat{m}_n$ sera donc convergent si :

$$\phi_1 = \left(\psi + \frac{n}{2}\right)_{\text{mod } 1}$$

$$\sigma_1 = 2\left|\sum_{i,j=1}^{\infty}\Delta\mu_i\Delta\mu_j\cos 2\pi(\mu_i-\mu_j) + 2\Delta\mu_\infty\sum_{i=1}^{\infty}\Delta\mu_i\cos 2\pi(\mu-\mu_i)\right|^{1/2}$$

$$\text{ou } \sigma_1 = 2 \left| \sum_{i=1}^{\infty} \Delta\mu_i \cos 2\pi (\psi - \mu_i) + \Delta\mu_\infty \cos 2\pi (\psi - \mu) \right|$$

$$\text{avec } \psi_0 = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Arctg} \left[\sum_{i=1}^{\infty} \Delta\mu_i \sin 2\pi\mu_i + \Delta\mu_\infty \sin 2\pi\mu \right] \left[\Delta\mu_i \cos 2\pi\mu_i + \Delta\mu_\infty \cos 2\pi\mu \right]^{-1}$$

$$\text{et } n \text{ tel que } (-1)^n \left[\sum_{i=1}^{\infty} \Delta\mu_i \cos 2\pi (\psi - \mu_i) + \Delta\mu_\infty \cos 2\pi (\psi - \mu) \right] \leq 0 \qquad (16)$$

5- $\rho(\tau)$ périodique ou presque périodique

Pour les raisons exposées dans le § 4 , on peut étendre les résultats obtenus dans le chapitre IV, §10 au cas où $\rho(\tau)$ est périodique. L'indice n qui variait alors de 1 à k (k étant le nombre de discontinuités) varie maintenant sur N tout entier .

Dans le cas où $\rho(\tau)$ est presque périodique, on étudie séparément les échantillonnages modulo T_1 , T_2 ,....., pseudo-périodes de $\rho(\tau)$.

6 - Tout ce qui précède s'étend au cas où $\ell(x)$ comporte un nombre fini de points d'accumulation de discontinuités. Les sommations portent alors sur l'ensemble de tous les sauts . Si nous nous limitons à ce cas, c'est que, à priori, il n'est pas certain qu'il existe des suites numériques dont les points d'accumulation forment un ensemble dénombrable ; dans l'hypothèse où de telles suites existent, il apparaît clairement que leur traitement devra être entièrement différent de celui développé dans les chapitres III, IV , et V.

C H A P I T R E - VI -

GENERATION DE SUITES DONT LA FONCTION DE REPARTITION EST UNE INTERPOLEE LINEAIRE

1- Introduction

Les chapitres III, IV, et V présentent un intérêt pratique si l'on est capable de générer des suites à distribution donnée. Nous étudierons, dans les chapitres suivants, les applications que l'échantillonnage des processus de Khintchine nous permettent d'envisager.

Il existe une méthode mathématique simple pour générer une suite à répartition modulo 1 , $\ell(x)$, donnée. En effet, si nous considérons la suite$\{\alpha_i\}$ uniformément répartie sur $[0,1[$, il est bien connu que la suite $\{\ell^{-1}(\alpha_i)\}$ aura $\ell(x)$ comme fonction de répartition. Physiquement, cette méthode est inacceptable, car elle nécessite la mise en oeuvre d'un matériel trop important, en même temps que trop spécialisé. Il est par contre aisé de générer des suites dont la fonction de répartition $\hat{\ell}(x)$ est une interpolée linéaire de $\ell(x)$; ce qui présente deux avantages décisifs : tout d'abord l'analyse mathématique comporte une branche importante s'occupant de l'interpolation linéaire, ce qui fait que l'on ne peut être gêné dans le choix de $\hat{\ell}(x)$. D'autre part, électroniquement, la simulation de $\hat{\ell}(x)$ s'avère très simple, et l'appareil construit sur le principe que nous allons développer est d'un emploi très souple en ce sens qu'il permet la simulation de n'importe quelle interpolée linéaire suffisamment régulière.

La méthode présentée ici consiste à réunir des suites uniformément distribuées (ou uniformément denses) . Nous considérerons ensuite

le cas particulier des suites $\{n\ \mu\}$.

Certains calculs resteront valables pour une interpolation plus générale que l'interpolation linéaire. Mais la simulation de telles fonctions nécessiterait des suites plus élaborées que les suites uniformément denses, ce qui diminue énormément l'intérêt de telles simulations.

2- Réunions finies de suites

2-1 Définitions

Considérons les p suites non décroissantes et non majorées $\{\alpha_n^1\}$,$\{\alpha_n^2\}$ ..... $\{\alpha_n^p\}$. On note $F_i(n,x)$ et $\ell_i(x)$ les caractéristiques modulo 1 de ces diverses suites ; on supposera toujours l'existence de

$$\ell_i(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{F_i(n,x)}{n} \qquad \forall\ i\ .$$

On définit de la manière suivante la suite $\{\beta_n\}$, "réunion" des suites $\{\alpha_n^i\}$, i = 1,2....p :

1) tout élément β_n est un élément α_k^i et réciproquement, tout α_k^i est un élément de la suite $\{\beta_n\}$.

2) si $\beta_n = \alpha_k^i$, tout élément $\alpha_h^j < \alpha_k^i$ est un élément β_m tel que m < n

3) si k éléments des suites $\{\alpha_n^i\}$ sont identiques et

k seulement, il existe k indices $n, n+1, \ldots\ldots n+k-1$ tels que $\beta_n = \beta_{n+1} \ldots\ldots = \beta_{n+k-1}$, et $\beta_{n-1} < \beta_n < \beta_{n+k}$

Toutes les suites $\{\beta_n\}$ ainsi construites sont identiques et ordonnées (au sens large) . On note $F(n,x)$ et $\ell(x)$ les caractéristiques modulo 1 de la suite $\{\beta_n\}$.

2- 2 La recherche de $\ell(x)$ n'a de l'intérêt que s'il existe un ensemble de réels non nuls a_{ij} , $i,j = 1, 2\ldots\ldots p$, définis par $\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n^i}{\alpha_n^j} = a_{ij}$. Les deux exemples suivants le démontrent .

2-2- 1 Exemple 1

Soit les deux suites $\{n + \frac{1}{2}\}$ et $\{2^n + \frac{2}{3}\}$.

Considérons la réunion $\{\beta_n\}$ de ces deux suites telle qu'elle est définie dans le paragraphe 2-1 . Posons par exemple, $\beta_p = 2^n + \frac{2}{3}$. Il est clair que dans les p premiers termes de la suite $\{\beta_n\}$ il y aura 2^n éléments de la suite $\{n + \frac{1}{2}\}$ et seulement n de la suite $\{2^n + \frac{2}{3}\}$. Le rapport de ces deux nombres tend vers l'infini en même temps que n (et p) . Il s'ensuit que "presque tous les termes " de la suite $\{\beta_n\}$ pris modulo 1 seront égaux à $\frac{1}{2}$ et que donc $\ell(x) = \ell_1(x)$, avec $\ell_1(x) = 0$ si $x \leq \frac{1}{2}$

$\ell_1(x) = 1$ si $x > \frac{1}{2}$

On perçoit le fait que $a_{12} = 0$ entraîne $\ell(x) = \ell_1(x)$; tout se passe donc comme si la suite $\{2^n + \frac{2}{3}\}$ n'intervenait pas .

2-2-2 Exemple 2

Considérons les suites $\{\alpha_n^1\}$ et $\{\alpha_n^2\}$ définies de la manière suivante : $\{\alpha_n^1\}$ est telle que $\alpha_n^1 = n^2 + \frac{1}{4}$

$\{\alpha_n^2\}$ est la succession des termes $1 + \frac{1}{3}$, $2 + \frac{1}{3}$, $2 + 1 + \frac{1}{3}$,

$2^4 + \frac{1}{3}$, $2^4 + 1 + \frac{1}{3}$, $2^4 + 2 + \frac{1}{3}$, $2^4 + 2^2 - 1 + \frac{1}{3}$, ...

$2^{2(n-1)} + 2^{n-1} - 1 + \frac{1}{3}$, $2^{2n} + \frac{1}{3}$, $2^{2n} + 1 + \frac{1}{3}$, ... ,

$2^{2n} + 2^n - 1 + \frac{1}{3}$, $2^{2(n+1)} + \frac{1}{3}$, ...

Il est clair que $\alpha^2_{2^{n+1}-1} = 2^{2n} + 2^n - 1 + \frac{1}{3}$

$$\alpha^2_{2^{n+1}} = 2^{2(n+1)} + \frac{1}{3}$$

Les fonctions de répartition $\ell_1(x)$ et $\ell_2(x)$ existent et sont définies par

$$\ell_1(x) = 0 \quad \text{si} \quad x \leq \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \ell_1(x) = 1 \quad \text{si} \quad x > \frac{1}{4}$$

$$\ell_2(x) = 0 \quad \text{si} \quad x \leq \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \ell_2(x) = 1 \quad \text{si} \quad x > \frac{1}{3}$$

D'autre part, on voit que $\underline{\lim} \frac{\alpha_n^1}{\alpha_n^2} = 1$ et $\overline{\lim} \frac{\alpha_n^1}{\alpha_n^2} = 4$, ce qui fait

que a_{12} n'existe pas.

Effectuons maintenant la réunion des deux suites $\{\alpha_n^1\}$ et $\{\alpha_n^2\}$. Cela revient à prendre les éléments appartenant aux deux suites et à les ordonner . On obtient ainsi la suite $\{\beta_n\}$. Arrêtons cette suite au terme $\alpha^2_{2^{n+1}} = 2^{2(n+1)} + \frac{1}{3}$; le dernier terme de $\{\alpha_n^1\}$ le précédant est $\alpha^1_{2^{n+1}} = 2^{2(n+1)} + \frac{1}{4}$. On trouve donc , modulo 1 , dans la suite$\{\beta_n\}$ arrêtée au terme $\alpha^2_{2^{n+1}}$, 2^{n+1} termes égaux à $\frac{1}{3}$ et autant égaux à $\frac{1}{4}$.

Arrêtons maintenant la suite $\{\beta_n\}$ au terme $\alpha^2_{2^{n+1}-1} = 2^{2n} + 2^n - 1 + \frac{1}{3}$, et cherchons le rang du dernier terme appartenant à la suite $\{\alpha_n^1\}$, soit $\alpha^1_{2^n+k}$. k est tel que $(2^n+k)^2 + \frac{1}{4} < 2^{2n} + 2^n - 1 + \frac{1}{3}$

soit $k^2 + 2^{n+1} k - 2^n + \frac{11}{12} < 0$

Ce trinôme en k comporte deux racines de signes contraires . La valeur de k cherchée est le plus grand entier inférieur à la racine positive θ du trinôme . Un calcul simple montre que

$$\theta = -2^n \left[1 - \sqrt{1 + 2^{-n} - \frac{11}{3}\ 2^{-2n-2}}\right]$$

d'où, dès que n est suffisamment grand

$$\theta \# 2$$

A un ou deux éléments près , on voit que le terme de la suite $\{\alpha_n^1\}$ cherché est $\alpha^1_{2^n}$. Donc la suite $\{\beta_n\}$ tronquée comporte, modulo 1 , $2^{n+1} - 1$ éléments égaux à $\frac{1}{3}$ et seulement 2^n égaux à $\frac{1}{4}$ (à deux près) . ..

Suivant que l'on se place dans l'un ou l'autre des cas précédents, et si $x \in]\frac{1}{4}, \frac{1}{3}[$, $\frac{F(n,x)}{n}$ sera proche de $\frac{2^{n+1}}{2 \times 2^{n+1}} = \frac{1}{2}$ ou de $\frac{2^n}{2^n + 2^{n+1}} = \frac{1}{3}$. En conséquence la fonction de répartition de la suite $\{\beta_n\}$ n'existe pas .

Les exemples donnés dans les deux paragraphes précédents montrent suffisamment la nécessité de supposer l'existence des termes a_{ij} , qui rendent compte des croissances comparées des suites $\{\alpha_n^i\}$ et $\{\alpha_n^j\}$.

2-3 Lemme 1

H Il existe une suite croissante $f(n)$ telle que :

1) $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n+1)}{f(n)} = 1$

2) $\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n^i}{f(n)} = a_i$, $\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n^j}{f(n)} = a_j$, a_i et a_j finis non nuls .

N'(N) est un des entiers définis par $|\alpha_N^i - \alpha_{N'}^j| = \inf_{n \in N} |\alpha_N^i - \alpha_n^j|$

$$\underline{C} \quad \lim_{N\to\infty} \frac{f(N)}{f(N')} = \frac{a_j}{a_i}$$

Posons $\alpha_n^i = \lambda_n^i \, a_i$

$$\alpha_n^j = \lambda_n^j \, a_j$$

N' est tel que $|\lambda_N^i \, a_i - \lambda_{N'}^j \, a_j| = \inf_{n \in N} |\lambda_N^i \, a_i - \lambda_n^j \, a_j|$

$$|\lambda_N^i \frac{a_i}{a_j} - \lambda_{N'}^j| = \inf_{n \in N} |\lambda_N^i \frac{a_i}{a_j} - \lambda_n^j|$$

avec : $\lambda_{N'}^j \leq \lambda_N^i \frac{a_i}{a_j} \leq \lambda_{N'+1}^j$

ou : $\lambda_{N'-1}^j \leq \lambda_N^i \frac{a_i}{a_j} \leq \lambda_{N'}^j$

d'où l'inégalité :

$$0 \leq \left|\frac{\lambda_N^i \, a_i}{\lambda_{N'}^j \, a_j} - 1\right| \leq \frac{1}{\lambda_{N'}^j} \sup \left(\lambda_{N'+1}^j - \lambda_{N'}^j, \lambda_{N'}^j - \lambda_{N'-1}^j \right)$$

D'autre part :

$$\frac{\lambda_{N'+1}^j - \lambda_{N'}^j}{\lambda_{N'}^j} = \frac{f(N')}{\lambda_{N'}^j} \left[\frac{f(N'+1)}{f(N')} \frac{\lambda_{N'+1}^j}{f(N'+1)} - \frac{\lambda_{N'}^j}{f(N')} \right] \underset{N'\to\infty}{\to} 0$$

puisque $\lim_{N\to\infty} \frac{\lambda_N^i}{f(N)} = 1$ et $\lim_{N\to\infty} \frac{f(N'+1)}{f(N')} = 1$,

Il s'ensuit : $\lim_{N\to\infty} \frac{\lambda_N^i}{\lambda_{N'}^j} = \frac{a_j}{a_i}$

et $\lim_{N\to\infty} \frac{f(N)}{f(N')} = \frac{a_j}{a_i}$ (1)

Ce lemme se prolonge aisément de la manière suivante :

H f(n) a les mêmes propriétés que dans le lemme 1 .

$N'(N)$ défini par $\alpha_N^i - \alpha_{N'}^j = \inf_{n \in J_N} (\alpha_N^i - \alpha_n^j)$

J_N défini par $n \in J_N$ si $\alpha_N^i - \alpha_n^j \geq 0$

C $\lim_{N\to\infty} \frac{f(N)}{f(N')} = \frac{a_j}{a_i}$

La démonstration est semblable aux valeurs absolues près .

2-4 Lemme 2

H Il existe une suite croissante f(n) telle que :

1) $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n+1)}{f(n)} = 1$

2) $\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n^i}{f(n)} = a_i$, $\lim \frac{\alpha_n^j}{f(n)} = a_j$; a_i et a_j finis non nuls . $N_i(\theta)$ et $N_j(\theta)$ deux entiers tels que :

$$\theta - \alpha_{N_i}^i = \inf_{n \in J_i} (\theta - \alpha_n^i)$$

$$\theta - \alpha_{N_j}^j = \inf_{n \in J_j} (\theta - \alpha_n^j) \quad , \quad \theta \in R_+$$

$J_i(\theta)$ et $J_j(\theta)$ ensemble des n définis par :

$$\theta - \alpha_n^i \geq 0 \text{ et } \theta - \alpha_n^j \geq 0$$

C $\lim_{\theta\to\infty} \dfrac{f(N_i)}{f(N_j)} = \dfrac{a_j}{a_i}$

Il existe un ensemble dénombrable I de valeurs de θ qui forment la suite non décroissante $\{\alpha_n\}$ et qui sont telles que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\alpha_n}{f(n)} = 1$.

Par exemple la suite générée par $\alpha_n = \text{Ent } [f(n)]$ (puisque α_n^i non majorée).

Soit θ tel que

$$\theta = \alpha_{N'} \quad , (N'(\theta)) .$$

D'après le prolongement du lemme 1 :

$$\lim_{\substack{\theta\to\infty \\ \theta\in I}} \frac{f(N')}{f(N_i)} = a_i \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{\theta\to\infty \\ \theta\in I}} \frac{f(N')}{f(N_j)} = a_j$$

d'où

$\lim_{\substack{\theta\to\infty \\ \theta\in I}} \dfrac{f(N_i)}{f(N_j)} = \dfrac{a_j}{a_i}$, ce qui n'est pas concluant puisque nous n'avons pas démontré que $\dfrac{f(N_i)}{f(N_j)}$ tend bien vers une limite sur R_+ .

Cette dernière objection se lève de la manière suivante :

Posons $\theta_1 = \alpha_{N'+1} = \text{Ent } [f(N'+1)]$

A θ_1 correspondent P_i et P_j , comme N_i et N_j correspondent à θ . Alors :

$$\lim_{\substack{\theta_1\to\infty \\ \theta_1\in I}} \frac{f(N'+1)}{f(P_i)} = a_i \quad , \quad \lim_{\substack{\theta_1\to\infty \\ \theta_1\in I}} \frac{f(N'+1)}{f(P_j)} = a_j \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{\theta_1\to\infty \\ \theta_1\in I}} \frac{f(P_i)}{f(P_j)} = \frac{a_j}{a_i}$$

.....

Soit maintenant un réel $\eta \in [\theta, \theta_1]$, auquel correspondent Q_i et Q_j .

Par définition de P_i , P_j,...., et puisque $\theta_1 \geq \theta$ on peut écrire les inégalités :

$$N_i \leq Q_i \leq P_i$$

$$N_j \leq Q_j \leq P_j$$

d'où, puisque f est non décroissante :

$$\frac{f(N_i)}{f(N_i)} \leq \frac{f(Q_i)}{f(N_i)} \leq \frac{f(P_i)}{f(N_i)} = \frac{f(P_i)}{f(N'+1)} \times \frac{f(N')}{f(N_i)} \times \frac{f(N'+1)}{f(N')}$$

d'où $\lim_{\theta\to\infty} \frac{f(Q_i)}{f(N_i)} = 1$ puisque $\lim_{N'\to\infty} \frac{f(N')}{f(N'+1)} = 1$

De même $\lim_{\theta\to\infty} \frac{f(Q_j)}{f(N_j)} = 1$ ce qui démontre la proposition, à savoir que

le rapport $\frac{f(Q_i)}{f(Q_j)}$ a la même limite que $\frac{f(N_i)}{f(N_j)}$.

2- 5 Caractéristiques modulo 1 d'une réunion finie de suites

Soit - les suites $\{\alpha_n^1\}$..... $\{\alpha_n^p\}$ non décroissantes et non majorées.

- la fonction f(n) monotone, croissante à partir d'une certaine valeur de n , et telle que $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n+1)}{f(n)} = 1$

- les nombres réels finis non nuls a_1.... a_p tels que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n^i}{f(n)} = a_i \quad ,\forall\, i = 1,..... p$$

On cherche la caractéristique modulo 1 , $\ell(x)$, de la suite $\{\beta_n\}$ définie à partir des suites $\{\alpha_n^i\}$ dans § 2-1

On peut écrire :

$$F(N,x) = \sum_{i=1}^{p} F_i(N_i,x) \qquad \text{avec } N = \sum_{i=1}^{p} N_i$$

$$\frac{F(N,x)}{N} = \sum_{i=1}^{p} \frac{F_i(N_i,x)}{N_i} \quad \frac{N_i}{N}$$

N_i est le nombre d'éléments de la suite $\{\alpha_n^i\}$ qui sont représentés dans les N premiers éléments de la suite $\{\beta_n\}$. Du lemme 2 on déduit aisément que

$\lim_{N\to\infty} \frac{f(N_i)}{f(N_j)} = \frac{a_j}{a_i}$. On suppose alors que cette égalité permet de déterminer un nombre b_{ij} dépendant de f, a_i , a_j et tel que

$$\lim_{N\to\infty} \frac{N_i}{N_j} = b_{ij} \qquad (2)$$

Dans ce cas, il s'ensuit que $\lim_{N\to\infty} \frac{N}{N_i} = \lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{p} \frac{N_j}{N_i} = \sum_{j=1}^{p} b_{ji}$

D'où :

$$\ell(x) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\ell_i(x)}{\sum_{j=1}^{p} b_{ji}} \qquad (3)$$

Cette relation détermine complètement $\ell(x)$ en fonction des caractéristiques propres $\ell_i(x)$ des suites $\{\alpha_n^i\}$ et des propriétés intersuites représentées par les b_{ij} .

2- 6 Conséquence

Sous les hypothèses du § 2-5 , toute réunion de suites uniformément réparties est encore uniformément répartie .

En effet, $\ell_i(x) = x \quad , \forall\, i,\ x \in [0,1]$. D'où , d'après (3) :

$$\ell(x) = \sum_{i=1}^{p} \frac{x}{\sum_{j=1}^{p} b_{ji}} = \lambda x = x$$

3- Filtrage et réunion de suites

3-1 Définition

Soit la suite $\{\alpha_n^i\}$. Considérons l'intervalle $[c_{2i-1} , c_{2i}[\subset [0,1[$ et l'ensemble $J \subset \mathbb{N}$ défini par $n \in J$ si, et seulement si ,

$$\alpha_n \mod 1 \in [c_{2i-1} , c_{2i}[\ .$$

Si J est dénombrable, on définit ainsi une nouvelle suite $\{\alpha_n^i\}_{n \in J}$.

$\{\alpha_n^i\}_{n \in J}$ est dite extraite par filtrage modulo 1 sur $[c_{2i-1} , c_{2i}[$ de la suite $\{\alpha_n^i\}$. On note $\{\gamma_n^i\}$ $(n \in \mathbb{N})$, $F'_i(n,x)$, $\ell'_i(x)$, la suite ainsi obtenue et ses caractéristiques modulo 1 .

3- 2 Propriétés de $\{\gamma_n^i\}$

3-2- 1 Théorème

H $\{\alpha_n^i\}$ est telle que $\ell_i(c_{2i}) - \ell_i(c_{2i-1}) \neq 0$

C $\ell'_i(x) = 0 \quad$ si $x < c_{2i-1}$

$$\ell'_i(x) = \frac{\ell_i(x) - \ell_i(c_{2i-1})}{\ell_i(c_{2i}) - \ell_i(c_{2i-1})} \quad \text{si } x \in [c_{2i-1}, c_{2i}[$$

$$\ell'_i(x) = 1 \quad \text{si } x \geq c_{2i} \qquad (4)$$

Si $x < c_{2i-1}$, $F'_i(N,x) = 0$, $\forall$ N, d'après la construction de la suite $\{\gamma_n^i\}$, d'où $\ell'_i(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{F'_i(N,x)}{N} = 0$

De même, si $x \geq c_{2i}$, $F'_i(N,x) = N$ d'où $\ell'_i(x) = 1$

Si $x \in [c_{2i-1}, c_{2i}[$, on peut écrire :

$$\frac{F'_i(N',x)}{N'} = \frac{F_i(N,x) - F_i(N,c_{2i-1})}{N - k(N)}$$

$\gamma_{N'}^i$, N'-ième élément de la suite filtrée, étant le N ième élément de la suite originelle.

$k(N) = N - N'$ représente le nombre d'éléments de la suite $\{\alpha_n^i\}$ qui n'appartiennent pas à la suite filtrée et qui sont tels que

$n \leq N$.

Alors : $k(N) = F(N, c_{2i-1}) + N - F(N, c_{2i})$

Il s'ensuit que $\lim_{N\to\infty} \frac{k(N)}{N} = \ell_i(c_{2i-1}) + 1 - \ell_i(c_{2i})$

D'où :

$$\lim_{N\to\infty} \frac{F'_i(N',x)}{N'} = \lim_{N\to\infty} \frac{F_i(N,x) - F_i(N, c_{2i-1})}{N} \cdot \frac{1}{1 - \frac{k(N)}{N}}$$

et : $\ell'_i(x) = \dfrac{\ell_i(x) - \ell_i(c_{2i-1})}{\ell_i(c_{2i}) - \ell_i(c_{2i-1})}$

Remarque :

1) La continuité de $\ell_i(x)$ sur $[c_{2i-1}, c_{2i}[$ induit la continuité de $\ell'_i(x)$ sur $[0,1]$. Les discontinuités de $\ell_i(x)$ sur $[c_{2i-1}, c_{2i}[$ sont conservées . Même remarque en ce qui concerne les dérivées éventuelles de $\ell_i(x)$ et de $\ell'_i(x)$ sur $]c_{2i-1}, c_{2i}[$

2) L'hypothèse $\ell_i(c_{2i}) - \ell_i(c_{2i-1}) \neq 0$ est suffisante . Dans le cas contraire, on ne peut en général rien dire sur $\ell'_i(x)$, en tout cas par rapport à $\ell_i(x)$. En effet, la suite extraite de $\{\alpha_n^i\}$ n'a, alors, aucune influence sur $\ell_i(x)$.

3-2- 2 Exemple Considérons les deux suites $\{\alpha_n^1\}$ et $\{\alpha_n^2\}$ suivantes :

$$\alpha_n^1 = \alpha_n^2 = n\mu \quad \text{si} \quad (n\mu) \bmod 1 \in [0, \tfrac{1}{2}[\,, \quad \mu \neq 0$$

$$\alpha_n^1 = \alpha_n^2 = 0 \quad \text{si} \quad (n\mu) \bmod 1 \notin [0, \tfrac{1}{2}[\text{ et si } n \neq p^2$$

$$\alpha_n^1 = \tfrac{3}{4} \quad \text{si} \quad (n\mu) \bmod 1 \notin [0, \tfrac{1}{2}[\text{ et si } n = p^2$$

$$\alpha_n^2 = n\mu \quad \text{si} \quad (n\mu) \bmod 1 \notin [0, \tfrac{1}{2}[\text{ et si } n = p^2$$

De toute évidence , $\ell_1(x) = \ell_2(x)$

avec $\ell_1(x) = x + \tfrac{1}{2}$ si $x \in]0, \tfrac{1}{2}]$

$\ell_1(x) = 1$ si $x \geqslant \tfrac{1}{2}$

Si on note $\{\gamma_n^1\}$ et $\{\gamma_n^2\}$ les suites extraites par filtrage sur l'intervalle $[\tfrac{1}{2}, 1[$, il est clair que

$$\ell_1'(x) = 0 \quad \text{si} \quad x \leqslant \tfrac{3}{4}$$

$$\ell_1'(x) = 1 \quad \text{si} \quad x > \tfrac{3}{4}$$

tandis que la suite $\{\gamma_n^2\}$ est uniformément répartie modulo 1 sur $[\tfrac{1}{2}, 1[$

On voit donc que le filtrage de deux suites de même fonction de répartition

sur $[c_{2i-1}, c_{2i}[$ ne donne pas obligatoirement les mêmes résultats si

$\ell_i(c_{2i}) - \ell_i(c_{2i-1}) = 0$

3-2-3 Cas particulier : suites uniformément réparties modulo 1.

Il s'agit des suites $\{\alpha_n^i\}$ telles que $\ell_i(x) = x$ pour $x \in [0,1]$.

Il découle immédiatement du § 3-2-1 :

$$\ell_i'(x) = 0 \qquad \text{si} \quad x < c_{2i-1}$$

$$\ell_i'(x) = \frac{x - c_{2i-1}}{c_{2i} - c_{2i-1}} \qquad \text{si} \quad x \in [c_{2i-1}, c_{2i}[\qquad (5)$$

$$\ell_i'(x) = 1 \qquad \text{si} \quad x \geq c_{2i}$$

$\ell_i'(x)$ est donc dans ce cas composée de trois segments de droites, dont deux horizontaux ; le troisième segment est caractérisé par sa pente, inversement proportionnelle à la largeur de la fenêtre de filtrage .

Presque toutes les suites numériques connues suivent une telle loi. C'est pourquoi ce cas revêt une importance toute particulière.

3-3 Réunion de suites filtrées disjointes

Soit la **partition** de $[0,1]$: $0, c_1, c_2 \ldots\ldots c_{2p}, 1$ avec

$0 \leq c_1 < c_2 \ldots\ldots \leq c_{2i-1} < c_{2i} \leq c_{2i+1} \ldots\ldots \leq c_{2p-1} < c_{2p} \leq 1$.

Les suites $\{\alpha_n^i\}$, $i = 1, 2, \ldots\ldots\ldots p$, sont filtrées

respectivement sur les segments $[c_{2i-1}, c_{2i}[$ et génèrent ainsi les suites $\{\gamma_n^i\}$, sous l'hypothèse $\ell_i(c_{2i}) - \ell_i(c_{2i-1}) \neq 0$, $\forall\, i = 1,2,..p$. Ces suites sont dites filtrées disjointes modulo 1.

On suppose de plus que les b_{ij} définis dans § 2-3 sont tous finis non nuls. L'ensemble des b'_{ij} est aux suites $\{\gamma_n^i\}$ ce que sont les b_{ij} aux suites $\{\alpha_n^i\}$. On suppose que b'_{ij} existe et est non nul, $\forall$ i et j.

Si $\{\partial_n\}$ est la réunion des suites $\{\gamma_n^i\}$, i = 1,2....p, $F'(N,x)$, $\ell'(x)$ ses caractéristiques modulo 1, les formules (3) et (4) deviennent :

$$\ell'(x) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\ell_i'(x)}{\sum_{j=1}^{p} b'_{ji}} \qquad (6)$$

Pour $x \in [c_{2k-1}, c_{2k}[$:

$$\ell'(x) = \sum_{i=1}^{k-1} \left[\sum_{j=1}^{p} b'_{ji}\right]^{-1} + \frac{\ell_k(x) - \ell_k(c_{2k-1})}{\ell_k(c_{2k}) - \ell_k(c_{2k-1})} \left[\sum_{j=1}^{p} b'_{jk}\right]^{-1} \qquad (7)$$

Pour $x \in [c_{2k}, c_{2k+1}[$, $\ell'(x) = \ell'(c_{2k})$

Dans le cas particulier où les suites $\{\alpha_n^i\}$ sont uniformément réparties modulo 1, (7) devient :

$$\ell'(x) = \sum_{i=1}^{k-1} \left(\sum_{j=1}^{p} b'_{ji} \right)^{-1} + \frac{x - c_{2k-1}}{c_{2k} - c_{2k-1}} \left(\sum_{j=1}^{p} b'_{jk} \right)^{-1} \quad (8)$$

$\ell'(x)$ est une fonction continue monotone non décroissante formée de segments de droites .

Reste alors à déterminer l'ensemble des b'_{ji} . Pour cela , il est nécessaire de préciser la structure des suites utilisées .

Nous allons étudier maintenant quelques cas particuliers .

3- 4 Cas particuliers : suites $\{n\mu_i\}$

On pose donc $\alpha_n^i = n\,\mu_i$ avec $\mu_i \notin Q$, $\forall i = 1,2 \ldots\ldots p$.

En vue d'appliquer le lemme 2 (§ 2-2) , on considère la fonction $f(n) = n$ qui est bien telle que $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n+1)}{f(n)} = 1$

D'autre part, la suite $\{\gamma_n^i\}$ est obtenue par filtrage de la suite $\{n\,\mu_i\}$ sur $[c_{2i-1} , c_{2i}[$.

$$\frac{\gamma_n^i}{n} = \frac{N_n\,\mu_i}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\mu_i}{c_{2i} - c_{2i-1}}$$ puisque n est le nombre d'éléments de la suite $\{n\mu_i\}$ représentés dans les N_n premiers éléments de la suite $\{\gamma_n^i\}$

De même $\lim_{n\to\infty} \frac{\gamma_n^j}{n} = \frac{\mu_j}{c_{2j} - c_{2j-1}}$

Il s'ensuit que :

$$\lim_{N\to\infty} \frac{f(N_i)}{f(N_j)} = \lim_{N\to\infty} \frac{N_i}{N_j} = \frac{\mu_j}{\mu_i} \cdot \frac{c_{2i} - c_{2i-1}}{c_{2j} - c_{2j-1}} = b'_{ij}$$

D'où :

$$\sum_{j=1}^{p} b'_{ji} = \frac{\mu_i}{c_{2i} - c_{2i-1}} \sum_{j=1}^{p} \frac{c_{2j} - c_{2j-1}}{\mu_j} = \frac{1}{A} \frac{\mu_i}{c_{2i} - c_{2i-1}}$$

avec :

$$A = \left(\sum_{j=1}^{p} \frac{c_{2j} - c_{2j-1}}{\mu_j} \right)^{-1}$$

(8) devient alors :

$$\ell'(x) = A \sum_{i=1}^{k-1} \frac{c_{2i} - c_{2i-1}}{\mu_i} + A \frac{x - c_{2k-1}}{\mu_k}$$

pour $x \in [c_{2k-1}, c_{2k}[$ (9)

3- 5 Cas particulier : suites $\{n^\theta \mu_i\}$, $\theta \in N$

On pose $\alpha_n^i = n^\theta \mu_i$, $\theta \in N$, $\mu_i \notin Q$. Si $f(n) = n^\theta$, on a encore :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n+1)}{f(n)} = 1$$

D'autre part, $\frac{\gamma_n^i}{f(n)} = \left[\frac{N_n}{n} \right]^\theta \mu_i \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\mu_i}{(c_{2i} - c_{2i-1})^\theta}$ puisque la suite $\{\alpha_n^i\}$ est uniformément répartie modulo 1.

Il s'ensuit que $\lim_{N\to\infty} \left[\frac{N_i}{N_j} \right]^\theta = \frac{\mu_j}{\mu_i} \left[\frac{c_{2i} - c_{2i-1}}{c_{2j} - c_{2j-1}} \right]^\theta$

et $\lim_{N\to\infty} \frac{N_i}{N_j} = \frac{c_{2i} - c_{2i-1}}{c_{2j} - c_{2j-1}} \left[\frac{\mu_j}{\mu_i} \right]^{1/\theta}$

On est ainsi ramené au cas précédent en remplaçant simplement μ_i par $(\mu_i)^{1/\theta}$

On prend donc $A = \left[\sum_{j=1}^{p} \frac{c_{2j} - c_{2j-1}}{(\mu_j)^{1/\theta}} \right]^{-1}$

et on obtient :

$$\ell'(x) = A \sum_{i=1}^{k-1} \frac{c_{2i} - c_{2i-1}}{(\mu_i)^{1/\theta}} + A \frac{x - c_{2k-1}}{(\mu_k)^{1/\theta}} \quad \text{pour } x \in [c_{2k-1}, c_{2k}[$$

Cette dernière expression est encore valable pour les suites polynomiales $\mu_i n^\theta + \beta_{1i} n^{\theta-1} + \ldots\ldots + \beta_{\theta i}$ avec un des coefficients autre que $\beta_{\theta i}$ irrationnel (μ_i non nécessairement irrationnel) .

4- Interpolation linéaire par réunions de suites $\{n \mu_i\}$ filtrées

Soit une interpolée linéaire $\hat{\ell}(x)$ définie par ses discontinuités propres et celles de sa dérivée première. Ces discontinuités forment une partition $0, c_1 \ldots c_{2p}, 1$ de $[0,1]$

Nous cherchons un ensemble de réels μ_i, $i = 1, 2 \ldots\ldots p$ tels que la réunion $\{\partial_n\}$ des suites $\{\gamma_n^i\}$ issues des suites $\{n \mu_i\}$ soit caractérisée par $\ell'(x) = \hat{\ell}(x)$.

On étudie successivement les cas où $\hat{\ell}(x)$ est continue ou non .

4- 1 Interpolation linéaire continue

$\hat{\ell}(x)$ est continue et parfaitement définie par les réels donnés $w_{2k} = w_{2k+1} = \hat{\ell}(c_{2k}) = \hat{\ell}(c_{2k+1})$. La figure 1 montre une telle interpolée.

Rappelons que les inégalités reliant les c_i sont de la forme :

$c_{2i-1} < c_{2i} \leq c_{2i+1} < c_{2i+2}$,

ce qui laisse la possibilité d'une interpolation linéaire strictement croissante.

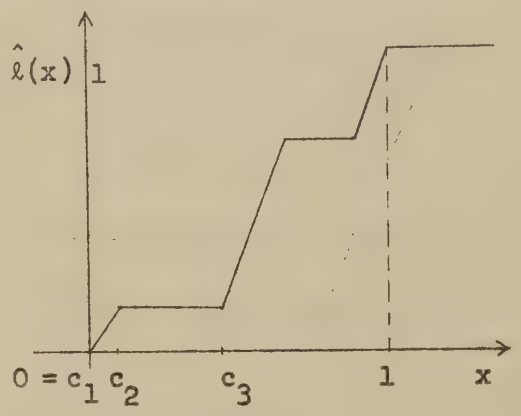

fig. 1

$\ell'(x)$ doit vérifier les relations $\ell'(c_k) = w_k$, ou, plus simplement ,

$\ell'(c_{2k}) = w_{2k}$, $\forall$, $k = 1, 2, \ldots\ldots p$

En utilisant la formule (9) du § 3-4 , on obtient le système suivant :

$$A \sum_{i=1}^{k} \frac{c_{2i} - c_{2i-1}}{\mu_i} = w_{2k} \quad , \forall\ k = 1,2,\ldots\ldots p$$

avec $\frac{1}{A} = \sum_{j=1}^{p} \frac{c_{2j} - c_{2j-1}}{\mu_j}$

Pour $k = 1$: $w_2 = A \frac{c_2 - c_1}{\mu_1} \Rightarrow A = \mu_1 \frac{w_2}{c_2 - c_1}$ (10)

D'autre part $w_{2k} - w_{2k-2} = A \frac{c_{2k} - c_{2k-1}}{\mu_k} \Rightarrow$

$$\mu_k = \mu_1 \frac{c_{2k} - c_{2k-1}}{c_2 - c_1} \frac{w_2}{w_{2k} - w_{2k-2}} \qquad (11)$$

μ_1 étant fixé quelconque, on retrouve aisément, avec l'expression (11) :

$\sum_{j=1}^{p} \frac{c_{2j} - c_{2j-1}}{\mu_j} = \frac{1}{\mu_1} \frac{c_2 - c_1}{w_2}$, ce qui démontre que

les équations (10) et (11) sont solutions de (9) .

Une dernière condition reste à vérifier : les suites $\{n\ \mu_i\}$ doivent être uniformément réparties modulo 1 ce qui impose $\mu_i \notin Q, \forall i = 1 \ldots p$.

En posant $A_k = \frac{c_{2k} - c_{2k-1}}{c_2 - c_1} \frac{w_2}{w_{2k} - w_{2k-2}}$, cette condition est équivalente à : $\mu_1 \notin \bigcup_{k=1}^{p} A_k\ Q$, condition que l'on peut toujours remplir puisque μ_1 peut décrire $R_+^* - Q_+^*$ et que $\bigcup_{k=1}^{p} A_k\ Q$ est un ensemble dénombrable.

On en déduit que l'ensemble des valeurs possibles de μ_1 qui sont solutions du problème a la puissance du continu, puisque Card $(R_+^* - Q_+^*)$ = Card R.

Il est donc toujours possible de générer une suite dont la caractéristique $\ell'(x)$ est une fonction donnée, monotone non décroissante, continue, formée de segments de droites.

Pour cela, on calculera tout d'abord l'ensemble des μ_i en fonction de μ_1 , w_i , c_k suivant la formule 11 .

On se donnera ensuite μ_1 de façon que μ_1 , $\mu_2 \ldots \mu_p$ soient irrationnels. Puis les suites $\{n\ \mu_i\}$ ainsi définies seront filtrées sur

les semi-ouverts $[c_{2i-1}, c_{2i}[$ et génèreront les suites $\{\gamma_n^i\}$.

La réunion de ces dernières suites suivant le § 2-1 donnera la suite $\{\vartheta_n\}$, solution du problème .

Remarque : Dans ce qui précède, nous avons utilisé pour simplifier les suites de la forme $\{n\mu\}$. Il se trouve que les suites de la forme $\{n\mu + \rho\}$ ont les mêmes propriétés que les précédentes : même caractéristique $\ell(x)$, mêmes caractéristiques de filtrage. Pour de telles suites, la formule (7) est toujours valable, les formules (10) et (11) le restent aussi dans la mesure où $\mu \notin Q$.

Cette remarque est importante pour deux raisons. Nous nous servirons en effet de telles suites dans le paragraphe suivant. D'autre part, du point de vue de la simulation électronique, ρ représente une phase : le fait que la phase n'intervienne pas permet l'emploi de générateurs indépendants non seulement en fréquence mais aussi en phase .

4-2 Interpolation linéaire discontinue

4-2-1 Introduction. On traite le cas où $\hat{\ell}(x)$ est discontinue en un seul point (fig.2). La résolution de ce problème entraînera celle du cas où $\hat{\ell}(x)$ a un nombre fini de discontinuités .

Soit donc la partition de $[0,1]$: $0 \leqslant c_1 \ldots < c_{2q} < \rho < c_{2q+1} \ldots \ldots c_{2p} \leqslant 1$, les c_i représentant toujours les abscisses des intersections des segments de droite composant $\hat{\ell}(x)$. On note toujours $0, w_1$, $w_2 \ldots\ldots w_{2q-1}$, w_{2q} , $w_{2q+1} \ldots\ldots w_{2p}$, 1 , les ordonnées correspondantes (figure 2) .

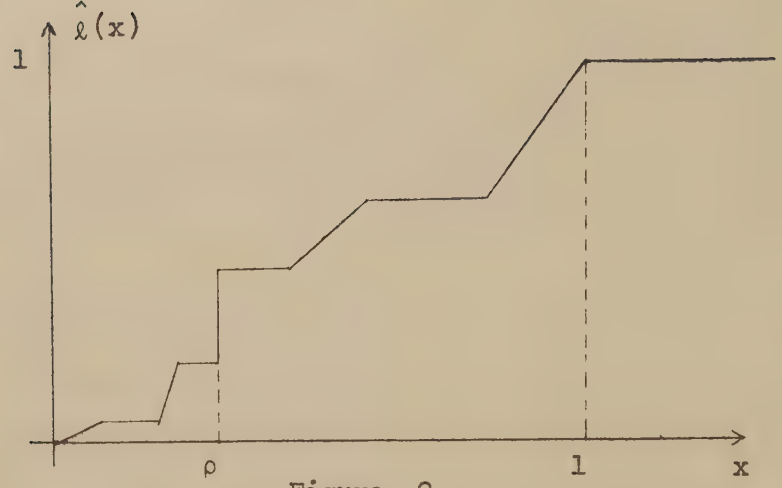

Figure 2

La discontinuité est définie par :

$w_{2q} = \hat{\ell}(\rho - \varepsilon)$

$w_{\rho} = \hat{\ell}(\rho)$

$w_{2q+1} = \hat{\ell}(\rho + \varepsilon)$ avec $w_{2q+1} - w_{2q} = \Delta\hat{\ell}_{\rho}$

La suite $\{\vartheta_n\}$ dont la caractéristique $\ell'(x) = \hat{\ell}(x)$, $\forall\, x \in [0,1]$

peut être composée par la réunion :

- des suites $\{\gamma_n^i\}$ issues de suites $\{n\,\mu_i\}$ filtrées sur $[c_{2i-1}$, $c_{2i}[$

  et telles que $\mu_i \notin \mathbb{Q}$.

- de la suite $\{n + \rho\}_{n \in J \subset \mathbb{N}}$, J étant un ensemble dénombrable d'indices à déterminer.

- de la suite $\{n + \rho - \varepsilon(n)\}_{n \in K \subset \mathbb{N}}$, K étant un ensemble dénombrable d'indices à déterminer et $\varepsilon(n)$ une suite strictement positive, tendant par exemple vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

$$\{\vartheta_n\} = \left[\bigcup_{k=1}^{p} \{\gamma_n^k\}\right] \cup \{n + \rho\}_{n \in J} \cup \{n + \rho - \varepsilon(n)\}_{n \in K}$$

les signes $\cup$ étant pris au sens du § 2-1 .

4-2-2 $\rho \neq 0$ et $\rho \neq 1$

On pose $N = \sum_{k=1}^{p} N_k + r + s$, N_i correspondant comme précédemment à la suite $\{\gamma_n^i\}$, r et s aux suites $\{n+\rho\}_{n \in J}$ et $\{n + \rho - \varepsilon(n)\}_{n \in K}$; $r' + \rho$ et $s' + \rho - \varepsilon(s')$ sont les $r^{\text{ième}}$ et $s^{\text{ième}}$ éléments de ces dernières suites. On suppose qu'il existe ϕ et ψ tels que :

$$\lim_{r \to \infty} \frac{r}{r'} = \phi \quad \text{et} \quad \lim_{s \to \infty} \frac{s}{s'} = \psi$$

Comme précédemment, par application du lemme 2, il vient :

$$\lim_{N \to \infty} \frac{N_i}{N_j} = \frac{c_{2i} - c_{2i-1}}{c_{2j} - c_{2j-1}} \quad \frac{\mu_j}{\mu_i}$$

$$\lim_{N \to \infty} \frac{r}{N_j} = \phi \, \frac{\mu_j}{c_{2j} - c_{2j-1}}$$

$$\lim_{N \to \infty} \frac{s}{N_j} = \psi \, \frac{\mu_j}{c_{2j} - c_{2j-1}}$$

D'où :

$$\lim_{N \to \infty} \frac{N}{N_j} = \frac{\mu_j}{c_{2j} - c_{2j-1}} \left[\phi + \psi + \sum_{k=1}^{p} \frac{c_{2k} - c_{2k-1}}{\mu_k} \right]$$

$$\lim_{N \to \infty} \frac{N}{r} = \frac{1}{\phi} \left[\quad \right]$$

$$\lim_{N \to \infty} \frac{N}{s} = \frac{1}{\psi} \left[\quad \right]$$

On pose maintenant $\frac{1}{A} = \phi + \psi + \sum_{k=1}^{p} \frac{c_{2k} - c_{2k-1}}{\mu_k}$

La formule (7) devient alors, en tenant compte du glissement d'indices, et des caractéristiques discontinues des deux nouvelles suites :

$$\ell'(x) = A \left[\sum_{k=1}^{j-1} \frac{c_{2k} - c_{2k-1}}{\mu_k} + \frac{x - c_{2j-1}}{\mu_j} \right]$$

Pour $x \in [c_{2j-1}, c_{2j}]$ $\quad , \forall\, j \leq q$

$$\ell'(\rho - \varepsilon) = \ell'(c_{2q})$$

$$\ell'(\rho) = A \left[\psi + \sum_{k=1}^{q} \frac{c_{2k} - c_{k-1}}{\mu_k} \right]$$

$$\ell'(\rho + \varepsilon) = A \left[\phi + \psi + \sum_{k=1}^{q} \frac{c_{2k} - c_{2k-1}}{\mu_k} \right]$$

$$\ell'(x) = A \left[\phi + \psi \sum_{k=1}^{j-1} \frac{c_{2k} - c_{2k-1}}{\mu_k} + \frac{x - c_{2j-1}}{\mu_j} \right] \quad \text{pour}$$

$x \in [c_{2j-1}, c_{2j}]$, $\quad \forall\ j \geq q + 1$.

et $\ell'(x) = \ell'(c_{2q})$ pour $x \in [c_{2k}, c_{2k+1}[$ $\quad , \forall k \neq q$

Conditions aux limites. $q \geq 1$

Il s'agit maintenant de déterminer $\mu_1, \mu_2, \ldots\ldots \mu_p, J,$ K, de façon que :

$$\ell'(\rho - \varepsilon) = w_{2q}$$

$$\ell'(\rho) = w_\rho$$

$$\ell'(\rho + \varepsilon) = w_{2q+1} \quad \text{et } \ell'(c_{2k}) = w_{2k} \quad ; \forall\, k = 1,2,\ldots p$$

On obtient alors :

1) $$w_2 = \ell'(c_2) = \Lambda \frac{c_2 - c_1}{\mu_1} \Rightarrow \Lambda = \mu_1 \frac{w_2}{c_2 - c_1} \qquad (12)$$

2) pour $1 \leq k \leq q$:

$$w_{2k} - w_{2k-2} = \Lambda \frac{c_{2k} - c_{2k-1}}{\mu_k} \Rightarrow \mu_k = \mu_1 \frac{c_{2k} - c_{2k-1}}{c_2 - c_1} \frac{w_2}{w_{2k} - w_{2k-2}}$$

3) $$w_\rho = \mu_1 \frac{w_2}{c_2 - c_1} \left[\psi + \sum_{k=1}^{q} \frac{c_2 - c_1}{\mu_1} \frac{w_{2k} - w_{2k-2}}{w_2} \right] \qquad (13)$$

$$w_\rho = \mu_1 \frac{w_2}{c_2 - c_1} \left[\psi + \frac{c_2 - c_1}{\mu_1} \frac{w_{2q}}{w_2} \right] \Rightarrow \frac{1}{\psi} = \frac{\mu_1}{c_2 - c_1} \frac{w_2}{w_\rho - w_{2q}} \qquad (14)$$

4) $$w_{2q+1} = \mu_1 \frac{w_2}{c_2 - c_1} \left[\phi + \psi + \sum_{k=1}^{q} \frac{c_2 - c_1}{\mu_1} \frac{w_{2k} - w_{2k-2}}{w_2} \right]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\phi} = \frac{\mu_1}{c_2 - c_1} \frac{w_2}{w_{2q+1} - w_\rho} \qquad (15)$$

5) $k \geq q + 1$

$$w_{2k} - w_{2k-2} = \Lambda \frac{c_{2k} - c_{2k-2}}{\mu_k} \Rightarrow \mu_k = \mu_1 \frac{c_{2k} - c_{2k-1}}{c_2 - c_1} \frac{w_2}{w_{2k} - w_{2k-2}}$$

On obtient dans ce cas une relation identique à l'expression (13) .

Remarquons que ces relations restent valables si $c_{2q} = \rho$ ou bien $c_{2q+1} = \rho$. On a, de cette manière, déterminé μ_1 , μ_2 ,.... μ_p , ϕ et ψ en fonction de μ_1 .

Des considérations identiques à celles du § 4-1 montrent que l'ensemble des valeurs de μ_1 telles que $\mu_1, \ldots\ldots \mu_p \notin Q$, ϕ et $\psi \leq 1$, a la puissance du continu. Il reste alors à déterminer les ensembles J et K. μ_1 étant donné, ϕ et ψ sont déterminés. On peut en déduire J et K d'une manière purement mécanique ; écrivons par exemple ϕ sous la forme de son développement décimal : $\phi = 0, \phi_1, \phi_2, \ldots\ldots \phi_n \ldots$ avec $\phi_i = 0, 1, \ldots \ldots 9$.

Il suffit alors d'extraire de la suite $\{n + \rho\}$, ϕ_1 termes dans chaque dizaine, plus ϕ_2 dans chaque centaine.... Le même procédé est, bien sûr, valable pour déterminer K. Le problème peut se simplifier dans le cas où $\frac{\phi}{\psi} \in Q$. Si on peut alors prendre μ_1 tel que ϕ soit rationnel, et les développements de ϕ et ψ finis, la simulation devient aisée.

Dans le cas où $q = 0$, on détermine A en fonction de ψ, donc $\mu_1, \mu_2 \ldots\ldots \mu_p$, en fonction de ψ, mais ceci ne change en rien les propriétés précédemment énoncées. Si $\psi = 0$, les paramètres se déterminent par rapport à ϕ.

4-2-3 $\rho = 0$ ou $\rho = 1$

La suite $\{n + \rho - \varepsilon(n)\}_{n \in K}$ ne peut pas induire de discontinuités en 0. De même, la suite $\{n + \rho\}_{n \in J}$ n'aura jamais de discontinuités en 1. Suivant que $\rho = 0$ ou $\rho = 1$, on aura donc $\psi = 0$ ou $\phi = 0$. Si $\psi = 0$, on détermine les inconnues $\mu_1, \mu_2, \ldots\ldots \mu_p$ en fonction de ϕ. Dans le cas où $\phi = 0$, $\mu_2, \mu_3 \ldots\ldots \mu_p$ et ψ seront exprimés en fonction de μ_1.

Ce paragraphe 4 se généralise aisément au cas d'un nombre fini de discontinuités. Le seul problème qui se pose en fait est de définir l'inconnue qui servira de variable indépendante. Et ceci dépend de la position des discontinuités.

5- Remarques

5-1 Toutes les suites envisagées jusqu'à présent le sont sous l'angle de leur fonction de répartition modulo 1 . Il est bien évident que les résultats précédents s'étendent modulo θ , $\theta \in \mathbb{R}_+$.

Dans cet ordre d'idée, l'étude des suites majorées ne présente aucun intérêt. Supposons en effet $\{\alpha_n^i\}$ majorée; de façon à ce que a_{ij} soit fini non nul, il faut que $\{\alpha_n^j\}$ soit aussi majorée .Comme les suites étudiées sont non décroissantes, elles sont de plus convergentes, ce qui entraîne que leurs fonctions de répartition modulo θ sont de la forme

$$\ell_i(x) = 0 \quad \text{pour } x < (\rho_i) \mod \theta$$

$$\ell_i(x) = 1 \quad \text{pour } x > (\rho_i) \mod \theta$$

avec $\rho_i = \lim_{n\to\infty} \alpha_n^i$

L'étude de la réunion de telles suites, telle qu'elle est définie au § 2-1 , n'a de l'intérêt que si $\rho_i = \rho_j$, $\forall$ i,j = 1.... p . Si en effet, il existe un indice i_0 tel que $\rho_i > \rho_{i_0}$, $i \neq i_0$, tout se passe comme si seule la suite $\{\alpha_n^{i_0}\}$ intervenait. Si $\rho_i = \rho_j$, $\ell_i(x) = \ell_j(x)$, $\forall$ i, j = 1 ..... p ; dans ce cas , on obtient évidemment $\ell(x) = \ell_i(x)$, quelque soit le filtrage envisagé, à condition toutefois que la suite obtenue après "filtrage-réunion" soit dénombrable.

5- 2 Nous avons supposé qu'aux suites $\{\alpha_n^i\}$ on pouvait associer une fonction f(n) non décroissante, non majorée, telle que $\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n^i}{f(n)} = a_i$ et $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n+1)}{f(n)} = 1$

La condition "il existe f(n) croissante et un ensemble de a_i finis non nuls tels que $\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n^i}{f(n)} = a_i$" exprime le fait que la croissance des suites $\{\alpha_n^i\}$ est comparable . La condition $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n+1)}{f(n)} = 1$ permet d'étudier en particulier la réunion de suites polynomiales . Que se passe-t-il lorsque $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n+1)}{f(n)} = \theta > 1$?

Supposons $\theta > 1$, et θ fini ; réunissons alors les deux suites $\{\alpha_n^1\}$ et $\{\alpha_n^2\}$. Nous avons vu (§ 2-5) que la fonction de répartition $\ell(x)$ de la suite réunion dépend de trois facteurs ; $\ell_1(x)$, $\ell_2(x)$ et b_{12} . Dans ce cas, nous aurons toujours $b_{12} = 1$, et donc (3) : $\ell(x) = \frac{1}{2}(\ell_1(x)+\ell_2(x))$

En effet, dès que n est assez grand, on peut écrire successivement :

$$\frac{a_1}{a_2} - \varepsilon < \frac{\alpha_n^1}{\alpha_n^2} < \frac{a_1}{a_2} + \varepsilon \; ; \; \theta - \varepsilon < \frac{f(n+1)}{f(n)} < \theta + \varepsilon \qquad (16)$$

Si $a_1 \leq a_2$, $\alpha_n^1 \leq \alpha_n^2$. Il existe alors un indice q tel que $\alpha_n^1 \leq \alpha_n^2 < \alpha_{n+q}^1$. Pour démontrer l'existence de cet indice, on écrit d'après (16) :

$$\frac{a_1}{a_2}\theta - \varepsilon' < \frac{\alpha^1_{n+1}}{\alpha^2_n} < \frac{a_1}{a_2}\theta + \varepsilon' \quad , \quad \frac{a_1}{a_2}\theta^q - \varepsilon' < \frac{\alpha^1_{n+q}}{\alpha^2_n} < \frac{a_1}{a_2}\theta^q + \varepsilon'$$

Comme $\theta > 1$, on peut toujours trouver q tel que $\frac{a_1}{a_2}\theta^q > 1$, ce qui entraîne bien, à partir d'une certaine valeur de n :

$$\alpha^1_n \leq \alpha^2_n < \alpha^1_{n+q}$$

En conséquence, si le Nième élément de la suite réunion est α^2_n, la suite réunion tronquée comportera entre n et n+q-1 éléments de la suite $\{\alpha^1_n\}$, ce qui montre que l'importance relative de chacune des suites composant la suite réunion est la même.

Ceci se généralise au cas de la réunion de p suites $\{\alpha^i_n\}$, i=1,2...p. On obtient alors $\ell(x) = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{p} \ell_i(x)$.

Même résultat si la suite $\frac{f(n+1)}{f(n)}$ est non majorée. Dans ce cas, en effet, dès que n est assez grand, on peut écrire l'inégalité $\alpha^1_n \leq \alpha^2_n < \alpha^1_{n+1}$, qui découle de l'inégalité $1 \leq \frac{\alpha^2_n}{\alpha^1_n} < \frac{\alpha^1_{n+1}}{\alpha^1_n}$, le terme du centre étant majoré alors que celui de droite ne l'est pas.

C H A P I T R E - VII -

APPLICATION à la DETECTION

1- Introduction :

Dans les chapitres 2, 3, 4, et 5, nous nous sommes demandés à quelles conditions une suite aléatoire, extraite par échantillonnage d'un processus stationnaire, peut procurer une estimation convergente de la moyenne stochastique du processus . La réponse à cette question est reliée directement à la structure du processus ; plus précisément, on traite différemment ce qui correspond aux parties continue et discontinue du spectre du processus.

Prenons un problème plus précis : considérons un processus sous la forme de la somme arithmétique d'un "signal" et d'un "bruit" , c'est-à-dire d'un processus à spectre de raies et d'un processus à spectre continu, les deux composants étant non corrélés. Détecter le signal dans le bruit revient à effectuer sur le processus résultant une opération dont le résultat est différent suivant que le signal est oui ou non présent dans le bruit. Les chapitres précédents nous permettent d'envisager une telle opération, puisqu'un échantillonnage approprié donnera une estimation convergente ou divergente de la moyenne du processus.

Electroniquement, ceci veut dire que si les processus composants sont de moyenne nulle, on obtiendra, dans un cas, une tension qui tendra vers 0, tandis que, dans l'autre, le résultat de l'opération sera une tension non nulle (avec une probabilité suffisamment grande) . Autrement dit, on pourra, en général, définir un seuil tel que le fait d'être au-dessus ou en-dessous nous fera "décider" de la présence ou de

l'absence du signal dans le bruit.

En fait, nous verrons que l'échantillonnage simple n'est pas très convaincant, ce qui nous amènera à envisager un échantillonnage double du processus . De plus, il sera difficile de calculer les paramètres qui définissent habituellement un test, tels que la probabilité de fausse alarme, la puissance, ou les risques α et β . Ces quantités sont liées à la décroissance de la fonction d'autocorrélation du bruit, et surtout à la vitesse de convergence des suites d'échantillonnage vers leur fonction de répartition. A l'heure actuelle, l'arithmétique ne nous donne, en général, que des renseignements très fragmentaires sur ce dernier paramètre.

2- Détection par un échantillonnage

2- 1 Définition :

X(t) est un processus de Khintchine, tel que $X(t)=S(t)+B(t)$, avec :

a) B(t) , un "bruit" , c'est-à-dire un processus de Khintchine dont la fonction d'autocorrélation $\rho_B(\tau)$ tend vers 0 avec $1/\tau$.

b) S(t), un "signal", de la forme $S(t) = \sum_k \alpha_k \cos 2\pi k(t+\theta_k+\Phi)$ (1)

avec :

- Φ , variable aléatoire uniformément répartie sur $[0,1[$
- $\sum_k \alpha_k \cos 2\pi k (t + \theta_k)$ converge uniformément par morceaux vers $S_0(t)$, échantillon de S(t) obtenu pour $\Phi = 0$. On note $S_\phi(t)$

l'échantillon du processus obtenu pour $\Phi = \phi$

c) $S(t)$ et $B(t')$ sont des processus indépendants $\forall\, t\,, \forall\, t'$.

$X(t)$ est échantillonné par la suite $\{t_i\}$, définie par ses caractéristiques $F(n,x)$ et $\ell(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{F(n,x)}{n}$. On étudie la variable aléatoire

$$A(n, \Phi) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X(t_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} B(t_i) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} S(t_i) = A_1(n) + A_2(n, \Phi) \,.$$

2-2 Etude de $A_1(n)$

Tout d'abord, $E\ [A_1(n)] = 0$. D'autre part, si la suite $\{t_i\}$ croît suffisamment vite, $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}\ A_1(n) = 0$ (voir chap. 2, Nous nous placerons toujours dans ce cas, sans expliciter davantage les conditions portant sur $\{t_i\}$, qui, de toute façon , sont très larges.

L'existence de $E\ [A_1(n)]$ et de $\mathrm{Var}\ [A_1(n)]$, permet l'application de l'inégalité de Bienaymé-Chebyshev , ou de toute autre inégalité similaire :

$$\Pr\left[\ |A_1(n)| > \lambda \sqrt{\mathrm{Var}\ A_1(n)}\right] < \frac{1}{\lambda^2} \qquad (2)$$

Comme λ est arbitrairement grand, indépendamment de $\mathrm{Var}\ A_1(n)$, quantité qui tend vers 0 avec $1/n$:

$$\forall\ \varepsilon, \varepsilon' > 0\ ,\ \exists\ N(\varepsilon,\varepsilon') \qquad \text{tel que } n > N \Longrightarrow \Pr\left[|A_1(n)| > \varepsilon\right] < \varepsilon'$$

2-3 Décomposition de $A_2(n,\phi)$

$$A_2(n,\phi) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} S(t_i)$$

Si $S_\phi(x)$ et $\ell(x)$ ne sont pas discontinues en même temps, on peut écrire :

$$\lim_{n\to\infty} A_2(n,\phi) = \int_0^1 S_\phi(x)\, d\ell\,(x) = \int_0^1 S_\phi(x)\, [d\ell_C(x) + d\ell_D(x)] \qquad (3)$$

$\ell_C(x)$ et $\ell_D(x)$ étant les parties continue et discontinue de $\ell(x)$.

Développons $\dfrac{d\ell_C(x)}{dx}$ en série de Fourier :

$$\frac{d\ell_C}{dx} = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k \cos 2\pi k(x - \psi_k)$$

S'il est possible d'intervertir les signes de sommation dans (3), en remplaçant $S_\phi(x)$ et $d\ell_C(x)$ par leur valeur, il vient :

$$\lim_{n\to\infty} A_2(n,\phi) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k \cos 2\pi k(\phi + \psi_k) + \sum_m \Delta\mu_m\, S_\phi(\mu_m) \qquad (4)$$

(μ_m , $\Delta\mu_m$) représentant l'ensemble des discontinuités de $\ell(x)$ (abscisses et amplitudes des sauts).

Supposons que la convergence de $A_2(n,\phi)$ vers le second membre de (4) soit uniforme en ϕ. On peut alors décomposer $A_2(n,\phi)$ en

deux variables aléatoires $V(n,\Phi)$ et $U(\Phi)$, de façon que :

$$A_2(n,\Phi) = V(n,\Phi) + U(\Phi) \quad , \text{ avec :}$$

$$- U(\Phi) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k \cos 2\pi k (\Phi + \psi_k) + \sum_m \Delta\mu_m \; S(\mu_m)$$

- $V(n,\Phi) = A_2(n,\Phi) - U(\Phi)$ est une variable aléatoire dont la densité de probabilité est nulle à l'extérieur d'un intervalle arbitrairement petit $[-\varepsilon(n) , \varepsilon(n)]$.

Dans ces conditions, l'étude du terme $A_2(n,\Phi)$ revient à celle de la variable aléatoire $U(\Phi)$.

2-4 Cas particulier : $S_0(t) = \alpha \cos 2\pi t$

(4) s'écrit :

$$\lim_{n\to\infty} A_2(n,\phi) = \frac{\alpha}{2} \left[\sigma_1 \cos 2\pi (\phi + \psi_1) + 2 \sum_k \Delta\mu_k \cos 2\pi (\phi + \mu_k)\right]$$

Si le second membre de l'équation précédente converge uniformément vers le premier, on peut décomposer $A_2(n,\Phi)$ sous la forme :

$$A_2(n,\Phi) = V(n,\Phi) + U(\Phi)$$

d'où :

$$A(n,\Phi) = A_1(n) + V(n,\Phi) + U(\Phi)$$

D'après (2) et le paragraphe précédent, la variable aléatoire $A_1(n) + V(n,\Phi)$ est telle que :

$$\forall \; \varepsilon,\varepsilon' > 0 \; , \; \exists \; N_1(\varepsilon,\varepsilon') \text{ tel que } n > N_1 \Longrightarrow \Pr\left[|A_1(n)+V(n,\Phi)| > \varepsilon\right] < \varepsilon' \qquad (6)$$

Détecter le signal S(t) dans le bruit B(t) par un seul échantillonnage revient à déterminer un seuil $s > 0$ tel que, pour $n > N_1(\varepsilon,\varepsilon')$, on ait, ε et ε' étant arbitrairement petit :

$$\begin{cases} \Pr\left[|A_1(n) + V(n,\Phi)| > \varepsilon\right] < \varepsilon' \\ \Pr\left[|U(\Phi)| > s\right] > \beta \end{cases} \qquad (7)$$

Ces deux équations sont physiquement équivalentes à :

$$\Pr\left[|A_1(n) + \partial\, A_2(n,\Phi)| > s\right] < \varepsilon \qquad \text{si } \partial = 0$$

$$\Pr\left[|A_1(n) + \partial\, A_2(n,\varphi)| > s\right] > \beta \qquad \text{si } \partial = 1$$

Sachant que l'influence du bruit et du terme résiduel peut être réduite, d'après (6), seule la seconde inégalité de (7) est à vérifier.

2-4-1 $\ell(x)$ continue

L'égalité (5) devient alors :

$$U(\Phi) = \frac{\alpha\sigma_1}{2} \cos 2\pi\,(\Phi + \psi_1)$$

Supposons $\sigma_1 \neq 0$. Posant $H = (\Phi + \psi_1) \bmod 1$, H est une variable aléatoire uniformément répartie sur $[0,1[$, comme Φ. Il s'ensuit que la densité de probabilité de $U(\Phi)$ est :

$$p(u) = \frac{2}{\pi\alpha\,\sigma_1}\left[1 - \frac{4u^2}{\alpha^2\,\sigma_1^2}\right]^{-1/2} \qquad \text{pour } u \in \left]-\frac{\alpha\,\sigma_1}{2}, +\frac{\alpha\,\sigma_1}{2}\right[$$

et 0 ailleurs.

Etant donné $\beta \in [0,1[$ (par exemple 0,9 , ou 0,95, ou 0,99 ,....), on cherche $s > 0$ tel que $Pr\ [|U(\Phi)| > s\ ] > \beta$. Soit :

$$Pr\ [|U(\Phi)| > s] = \frac{2}{\pi} \int_0^s \frac{d(2u/\alpha\sigma_1)}{\left[1 - \frac{4u^2}{\alpha^2 \sigma_1^2}\right]^{1/2}} = \frac{2}{\pi} \text{Arc cos} \frac{2s}{\alpha\sigma_1} > \beta$$

ce qui entraîne : $s < \frac{\alpha\sigma_1}{2} \cos \frac{\pi\beta}{2}$ (8)

Une "bonne" détection correspnnd à $\beta \neq 1$. Si donc l'on pose $\gamma = 1 - \beta$ suffisamment petit, (8) devient :

$$s < \frac{\alpha\sigma_1}{2} \sin \frac{\pi\gamma}{2} \# \frac{\pi}{4} \alpha\sigma_1 \quad (9)$$

On a, bien sûr, intérêt à ce que s soit le plus grand possible devant ε, et γ le plus petit possible, de façon à ce que la probabilité de fausse alarme (à n donné) soit la plus faible possible .

Celle-ci est définie par :

$$p_{fa} = Pr\ [|A(n,\Phi)| > s |\ \alpha = 0\ ] = Pr\ [|A_1(n)| > s\ ]$$

La valeur de p_{fa} dépend de deux paramètres : d'une part la structure du bruit, et, d'autre part celle de l'échantillonnage. Il est, bien sûr illusoire de chercher la valeur de p_{fa} sans informations supplémentaires sur B(t) et $\ell(x)$. L'inégalité (9) montre de plus que l'échantillonnage $\{t_i\}$ sera d'autant plus sélectif que σ_1 sera grand .

Dans le chapitre 3 , on établit d'autre part que σ_1 est majoré par 2, ce qui fait que, dans tous les cas, $s < \frac{\pi}{2} \alpha\gamma$, soit

$\frac{s}{\alpha} < \frac{\pi}{2}\gamma$; $\frac{s}{\alpha}$, rapport seuil-amplitude du signal, pouvant définir la détection, en valeur-réduite. Remarquons enfin que $\frac{\pi}{2}\gamma$ est un majorant de $\frac{s}{\alpha}$ qui n'est jamais atteint dans le cas où $\ell(x)$ est continue.

2-4-2 $\ell(x)$ discontinue

(5) s'écrit :

$$U(\Phi) = \frac{\alpha}{2}\left[(\sigma_1 \cos 2\pi\psi_1 + 2\sum_k \Delta\mu_k \cos 2\pi\mu_k)\cos 2\pi\Phi - (\sigma_1 \sin 2\pi\psi_1 + 2\sum_k \Delta\mu_k \sin 2\pi\mu_k)\sin 2\pi\Phi\right]$$

Posant :

$$\sigma^2 = (\sigma_1 \cos 2\pi\psi_1 + 2\sum_k \Delta\mu_k \cos 2\pi\mu_k)^2 + (\sigma_1 \sin 2\pi\psi_1 + 2\sum_k \Delta\mu_k \sin 2\pi\mu_k)^2$$

$$\operatorname{tg} 2\pi\psi = \frac{\sin 2\pi\psi_1 + 2\sum_k \Delta\mu_k \sin 2\pi\mu_k}{\cos 2\pi\psi_1 + 2\sum_k \Delta\mu_k \cos 2\pi\mu_k}$$

il vient : $U(\Phi) = \frac{\alpha\sigma}{2}\cos 2\pi(\Phi-\psi)$

On se ramène ainsi au cas précédent, en remplaçant σ_1 et ψ_1 par σ et ψ .

Reprenant alors les notations du § 2-4-1 , le seuil s devra être tel que :

$\frac{s}{\alpha} < \frac{\sigma}{2}\cos\frac{\pi\beta}{2}$ soit, si $\gamma = 1 - \beta$ est suffisamment petit :

$$\frac{s}{\alpha} < \frac{\pi}{4}\ \sigma\ \gamma$$

Cette fois, σ peut atteindre sa borne qui est $\sigma = 2$. Elle correspond par exemple à l'échantillonnage défini par $\ell(x) = 0$ si $x < \mu$, $\ell(x) = 1$ si $x > \mu$.

Ce procédé de détection, par un seul échantillonnage, n'est cependant pas très puissant, en ce sens qu'il requiert d'une part un grand nombre d'échantillons pour minimiser l'influence du bruit et du terme résiduel $V(n,\Phi)$, et que, d'autre part, le seuil s est d'autant plus faible que la probabilité de détection β est plus grande.

3- Détection d'un signal sinusoïdal dans un bruit par double échantillonnage

3- 1 Détection en probabilité

Un procédé plus puissant de détection est celui du double échantillonnage. Soit deux échantillonnages $\{t_i^{(1)}\}$ et $\{t_i^{(2)}\}$, de fonctions de répartition $\ell_1(x)$ et $\ell_2(x)$, et auxquels correspondent les estimateurs

$$A^{(1)}(n,\Phi) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X(t_i^{(1)}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} [B(t_i^{(1)}) + S(t_i^{(1)})] =$$

$$A_1^{(1)}(n) + A_2^{(1)}(n,\Phi)$$

$$A^{(2)}(n,\Phi) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X(t_i^{(2)}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} [B(t_i^{(2)}) + S(t_i^{(2)})] =$$

$$A_1^{(2)}(n) + A_2^{(2)}(n,\Phi)$$

$B(t)$ et $S(t)$ sont les processus définis dans § 2-1 .

Comme précédemment, les suites $\{t_i^{(1)}\}$ et $\{t_i^{(2)}\}$ croissent suffisamment vite de façon à ce que :

$$\lim_{n\to\infty} \text{Var } A_1^{(1)}(n) = \lim_{n\to\infty} \text{Var } A_1^{(2)}(n) = 0$$

L'existence et la nullité de $E[A_1^{(1)}(n)]$ et $E[A_1^{(2)}(n)]$ font que :

$$\forall \varepsilon,\varepsilon' > 0 \ , \ \exists N^{(1)}(\varepsilon,\varepsilon') \quad \text{tel que } n > N^{(1)} \Rightarrow \Pr\left[|A_1^{(1)}(n)| > \varepsilon\right] < \varepsilon'$$

$$\forall \varepsilon,\varepsilon' > 0 \ , \ \exists N^{(2)}(\varepsilon,\varepsilon') \quad \text{tel que } n > N^{(2)} \Rightarrow \Pr\left[|A_1^{(2)}(n)| > \varepsilon\right] < \varepsilon'$$

Il s'ensuit que :

$$\forall \varepsilon,\varepsilon' > 0 \ , \ \exists N(\varepsilon,\varepsilon') \quad \text{tel que } n > N \Rightarrow \Pr\left[|A_1^{(1)}(n)+A_1^{(2)}(n)| > \varepsilon\right] < \varepsilon' \qquad (10)$$

On dira que le double échantillonnage $\{t_i^{(1)}\}$, $\{t_i^{(2)}\}$" détecte en probabilité" le signal $S(t)$ dans le bruit $B(t)$, s'il existe un seuil $s > 0$ tel que :

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\left[|A^{(1)}(n,\Phi)| + |A^{(2)}(n,\Phi)| > s\right] = 1 \qquad (11)$$

Plus généralement on peut définir une "détection en probabilité" de la manière suivante .

Etant donné $A(n,X)$ une variable aléatoire dépendant de n et du processus $X'(t) = B(t) + \partial S(t)$, $A(n,X)$ "détecte en probabilité" le signal $S(t)$ s'il existe un seuil $s > 0$ tel que :

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\ [\Lambda(n,X) > s] = 1 \qquad \text{si} \quad \vartheta = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\ [\Lambda(n,X) > s] = 0 \qquad \text{si} \quad \vartheta = 0 \qquad (12)$$

Il est clair que la variable aléatoire $A(n,\Phi)$ définie dans § 2 ne détecte pas en probabilité le signal $S(t)$. Tout au plus peut-on affirmer qu'il y a une certaine probabilité β pour que l'on reconnaisse la présence de $S(t)$.

D'autre part, les équations (10) et (11) sont équivalentes aux équations (12) en posant :

$$\Lambda(n,X) = |A^{(1)}(n,\Phi)| + |A^{(2)}(n,\Phi)|$$

3-2 Cas particulier : $S_0(t) = \alpha \cos 2\pi t$

On peut décomposer $A^{(1)}(n,\Phi)$ et $A^{(2)}(n,\Phi)$ sous la forme (voir § 2-3 et 2-4)

$$A^{(1)}(n) = A_1^{(1)}(n) + U^{(1)}(\Phi) + V^{(1)}(n,\Phi)$$

$$A^{(2)}(n) = A_1^{(2)}(n) + U^{(2)}(\Phi) + V^{(2)}(n,\Phi) \qquad (13)$$

Avec $A_1^{(1)}(n) + V^{(1)}(n,\Phi)$ et $A_1^{(2)}(n) + V^{(2)}(n,\Phi)$, variables aléatoires qui convergent vers 0 en probabilité.

$$U^{(1)}(\Phi) = \frac{\alpha}{2}\left[\sigma_1^{(1)} \cos 2\pi\,(\Phi + \psi_1^{(1)}) + 2\sum_k \Delta\mu_k^{(1)} \cos 2\pi\,(\Phi + \mu_k^{(1)})\right]$$

$$U^{(2)}(\Phi) = \frac{\alpha}{2}\left[\sigma_1^{(2)} \cos 2\pi\,(\Phi + \psi_1^{(2)}) + 2\sum_k \Delta\mu_k^{(2)} \cos 2\pi\,(\Phi + \mu_k^{(2)})\right] \qquad (14)$$

$\ell_1(x)$ et $\ell_2(x)$ étant suffisamment régulières, caractérisées par leurs discontinuités et les sauts correspondants $(\mu_1^{(1)}, \mu_2^{(1)} \ldots\ldots\ldots \Delta\mu_1^{(1)}, \Delta\mu_2^{(1)} \ldots\ldots\ldots, \mu_1^{(2)}, \mu_2^{(2)}, \ldots\ldots\ldots \Delta\mu_1^{(2)}, \Delta\mu_2^{(2)}, \ldots\ldots\ldots)$, et les développements en séries de Fourier des dérivées de leurs parties continues :

$$\frac{d\ell_c^{(1)}}{dx} = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k^{(1)} \cos 2\pi k(x - \psi_k^{(1)})$$

$$\frac{d\ell_c^{(2)}}{dx} = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k^{(2)} \cos 2\pi k(x - \psi_k^{(2)})$$

Reprenant les transformations du §2-4-2, on peut encore écrire :

$$U^{(1)}(\Phi) = \frac{\alpha\sigma_1}{2} \cos 2\pi (\Phi + \psi_1)$$

$$U^{(2)}(\Phi) = \frac{\alpha\sigma_2}{2} \cos 2\pi (\Phi + \psi_2)$$

σ_1, σ_2, ψ_1, ψ_2 tenant compte de $\sigma_1^{(1)}$, $\sigma_1^{(2)}$, $\psi_1^{(1)}$, $\psi_1^{(2)}$, $\mu_k^{(1)}$, $\mu_k^{(2)}$, $\Delta\mu_k^{(1)}$, $\Delta\mu_k^{(2)}$.

Si $\psi_1 = \psi_2 + k$, $k \in Z$, il est évident que l'on se ramène à un échantillonnage simple puisque $|U^{(1)}(\Phi)| + |U^{(2)}(\Phi)|$

$$= \frac{\alpha}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) |\cos 2\pi (\Phi + \psi_1)| .$$

Même conclusion si un des modules σ_1 ou σ_2 est nul.

Dans le cas contraire (σ_1 et σ_2 non nuls, et $\psi_2 - \psi_1 \notin Z$) $|U^{(1)}(\phi)| + |U^{(2)}(\phi)|$ possède un minimum non nul $s_0 > 0$.

Tout seuil $s = s_0 - \varepsilon_1 > 0$ obéit alors aux conditions (12), ce qui fait que le double échantillonnage $\{t_i^{(1)}\}$ et $\{t_i^{(2)}\}$ détecte en probabilité le signal $S(t)$.

Il est intéressant de déterminer s_0. En effet, plus s_0 sera grand, plus le seuil réduit $\frac{s}{\alpha}$ pourra être pris grand ; d'autre part, on pourra réduire la longueur de la mesure (ou le nombre d'échantillons) qui intervient dans la détermination de ε_1.

$$|U^{(1)}(\Phi)| + |U^{(2)}(\Phi)| = \frac{\alpha}{2}\left[\sigma_1 |\cos 2\pi (\Phi + \psi_1)| + \sigma_2 |\cos 2\pi(\Phi + \psi_2)|\right]$$

Cette quantité est une fonction continue de Φ ; son expression obtenue en supprimant les valeurs absolues, prend quatre formes sur les intervalles ∂_1, ∂_2, ∂_3, ∂_4, dont la réunion forme le domaine de définition de Φ, c'est-à-dire $[0,1[$.

Quelque soit le domaine ∂_i, on peut écrire :

$$\frac{d^2}{d\phi^2}\left[|U^{(1)}(\phi) + |U^{(2)}(\phi)|\right] = -|U^{(1)}(\phi)| - |U^{(2)}(\phi)| .$$

Il s'ensuit que cette dérivée seconde est toujours négative ; les extremum qui correspondent aux zéros de la dérivée première sont donc des maximum, sauf, éventuellement, si la dérivée première s'annule aux bornes des intervalles ∂_i.

En conséquence, les minimum de $|U^{(1)}(\phi)| + |U^{(2)}(\phi)|$ ne peuvent se trouver qu'aux bornes de ces intervalles, d'où la nécessité d'envisager

quatre éventualités, et non cinq, du fait de la périodicité de $|U^{(1)}(\phi)| + |U^{(2)}(\phi)|$

Par définition, les intervalles ∂_i seront les suivants :

$\phi \in \partial_1$: $U^{(1)}(\phi) > 0$ et $U^{(2)}(\phi) > 0$

$\phi \in \partial_2$: $U^{(1)}(\phi) > 0$ et $U^{(2)}(\phi) < 0$

$\phi \in \partial_3$: $U^{(1)}(\phi) < 0$ et $U^{(2)}(\phi) > 0$

$\phi \in \partial_4$: $U^{(1)}(\phi) < 0$ et $U^{(2)}(\phi) < 0$

Les frontières ϕ_i des intervalles précédents sont les suivants :

ϕ_1 : $U^{(1)}(\phi_1) = 0$ et $U^{(2)}(\phi_1) > 0$

ϕ_2 : $U^{(1)}(\phi_2) = 0$ et $U^{(2)}(\phi_2) < 0$

ϕ_3 : $U^{(1)}(\phi_3) > 0$ et $U^{(2)}(\phi_3) = 0$

ϕ_4 : $U^{(1)}(\phi_4) < 0$ et $U^{(2)}(\phi_4) = 0$

Les ϕ_i sont distincts puisque $U^{(1)}(\phi)$ et $U^{(2)}(\phi)$ ne s'annulent pas simultanément . Le seuil s_0 cherché est le minimum des quatre quantités suivantes :

$$\frac{\alpha}{2}\ \sigma_2\ |\cos 2\pi\ (\phi_1 - \psi_2)|$$

$$\frac{\alpha}{2}\ \sigma_2\ |\cos 2\pi\ (\phi_2 - \psi_2)|$$

$$\frac{\alpha}{2}\ \sigma_1\ |\cos 2\pi\ (\phi_3 - \psi_1)|$$

$$\frac{\alpha}{2}\ \sigma_1\ |\cos 2\pi\ (\phi_4 - \psi_1)| \qquad (15)$$

avec ϕ_1 , ϕ_2, ϕ_3, ϕ_4 tels que :

$$\cos 2\pi (\phi_1 - \psi_1) = \cos 2\pi (\phi_2 - \psi_1) = \cos 2\pi (\phi_3 - \psi_2) = \cos 2\pi(\phi_4 - \psi_2) = 0$$

soit

$$\phi_1 = \psi_1 + \frac{1}{4} + \frac{k_1}{2}$$

$$\phi_2 = \psi_1 + \frac{1}{4} + \frac{k_2}{2}$$

$$\phi_3 = \psi_2 + \frac{1}{4} + \frac{k_3}{2}$$

$$\phi_4 = \psi_2 + \frac{1}{4} + \frac{k_4}{2} \qquad (16)$$

avec $k_i \in Z$ et $k_1 \neq k_2$, $k_3 \neq k_4$

Reportant (16) dans (15) , on voit que s_0 est l'une des quantités

$$\frac{\alpha}{2} \sigma_2 \left|\sin 2\pi (\psi_1 - \psi_2)\right| \qquad \text{ou} \qquad \frac{\alpha}{2} \sigma_1 \left|\sin 2\pi(\psi_1 - \psi_2)\right|$$

d'où $s_0 = \frac{\alpha}{2} [\inf (\sigma_1 , \sigma_2)] \left|\sin 2\pi(\psi_1 - \psi_2)\right| \qquad (17)$

A σ_1 et σ_2 donnés, le double échantillonnage optimum, c'est-à-dire celui pour lequel s_0 est maximum, obéit à la relation $(\psi_1 - \psi_2)_{\text{mod } 1} = \frac{1}{4}$ ce qui est tout à fait compréhensible physiquement (échantillonnages en quadrature) .

De plus, s_0 est majoré par α . Le double échantillonnage correspondant à $s_0 = \alpha$ est évidemment défini par :

$\ell_1(x) = 0 \quad$ si $x < \mu$

$\ell_1(x) = 1 \quad$ si $x > \mu$

$\ell_2(x) = 0 \quad$ si $x < (\mu + \frac{1}{4})_{\text{mod } 1}$

$\ell_2(x) = 1 \quad$ si $x > (\mu + \frac{1}{4})_{\text{mod } 1} \qquad$ avec $\quad \mu \in [0,1[$

4- Détection d'un signal périodique dans un bruit.

4-1 On suppose que S(t) est un processus périodique de la forme :

$$S(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos 2\pi k (t + \Phi + \theta_k) \quad \text{avec :}$$

Φ , variable aléatoire uniformément répartie sur $[0,1[$. $|\alpha_k|$, série convergente, ce qui entraîne la convergence uniforme de la série $\alpha_k \cos 2\pi kx$ et la continuité de sa somme .

B(t) , le bruit, est déjà défini dans les paragraphes précédents.

On étudie l'échantillonnage simple puis double du processus $X(t) = S(t)+B(t)$.

4-2 Echantillonnage simple

Etant donné la suite $\{t_i\}$ de fonction de répartition $\ell(x)$ continue et suffisamment régulière, on étudie la quantité :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X(t_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} [B(t_i) + S(t_i)] = A_1(n) + A_2(n,\Phi)$$

Il vient :

$$\lim_{n\to\infty} A_2(n,\phi) = \int_0^1 S_\phi(x) \, d\ell(x) = \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos 2\pi k(x+\phi + \theta_k) \, d\ell(x) \qquad (18)$$

avec $\frac{d\ell}{dx} = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos 2\pi k(x - \psi_k)$

soit :

$$\lim_{n\to\infty} A_2(n,\psi) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sigma_k \cos 2\pi (\phi + \psi_k + \theta_k) \qquad (19)$$

La série $\alpha_k \sigma_k$ étant convergente, il s'ensuit que le second membre de (19) converge uniformément et que sa somme est une fonction continue de ϕ, majorée par $\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sigma_k$

En conséquence, $A_2(n,\Phi)$ peut se décomposer en deux variables aléatoires $U(\Phi)$ et $V(n,\Phi)$ avec :

$$U(\Phi) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sigma_k \cos 2\pi k(\Phi + \psi_k + \theta_k)$$

$V(n,\Phi)$, variable aléatoire dont la densité de probabilité est nulle à l'extérieur d'un intervalle $[-\varepsilon(n), +\varepsilon(n)]$, $\varepsilon(n)$ étant aussi petit que l'on veut, et tendant vers 0 avec $\frac{1}{n}$.

Si la suite $\{t_i\}$ croît suffisamment vite, on peut appliquer l'inégalité de Bienaymé Chebyshev à la variable aléatoire $A_1(n)$, d'où :

$$\forall\, \varepsilon, \varepsilon' > 0 \ , \ \exists\, N(\varepsilon,\varepsilon') \text{ tel que } n > N \implies \Pr\left[|A_1(n) + V(n,\Phi)| > \varepsilon\right] < \varepsilon'$$

On cherche, comme dans § 2, un seuil $s \in [0, \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \alpha_k[$, suffisamment grand devant ε, de façon à ce que $\Pr\left[|U(\Phi)| > s\right] > \beta$, β près de 1 .

Pour déterminer s, il est nécessaire de connaître la fonction de répartition de la variable aléatoire $U(\Phi)$. Supposons, pour cela, que $U(\Phi)$ est une fonction bijective par morceaux et différentiable sur $[0,1]$. Dans ces conditions :

$$f(u) = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{d\phi_i}{du} \right|$$

avec $\phi_i(u)$, une des restrictions monotones de $\phi^{-1}(u)$; $f(u)$, densité de probabilité de U.

Il est bien sûr illusoire, sans information supplémentaire sur les formes de $S_0(x)$ et $\ell(x)$, d'espérer calculer $f(u)$: tout au plus peut-on assurer l'existence du seuil s, qui est liée au fait qu'il n'existe pas de masse de probabilité en $u = 0$.

S'il existe, en effet, une telle masse c'est que $U(\phi)$ est nulle sur un certain intervalle, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse selon laquelle l'application $(\phi \rightarrow U)$ est bijective par morceaux . En fait, pour calculer s, il suffit, en général, de connaître $U(\phi)$ près de ses zéros. La figure 1 illustre cette assertion.

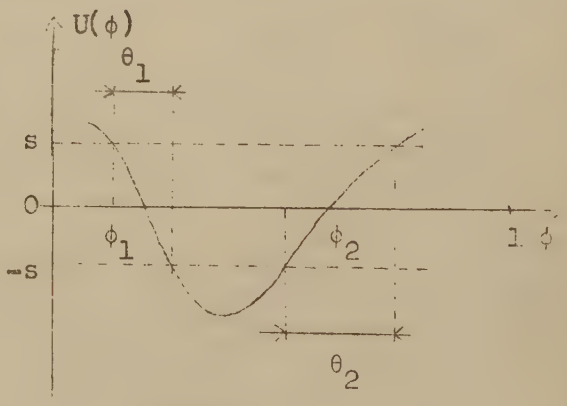

fig. 1

On peut penser que s décroît en même temps que $\gamma = 1 - \beta$, quel que soit l'échantillonnage employé. Prenant donc s suffisamment petit, il est clair que $\gamma = \sum_i \theta_i$, la somme étant étendue à tous les 0 de $U(\phi)$ obtenus aux abscisses $\phi = \phi_i$. s étant petit, on peut, dans la majorité des cas, confondre $U(\phi)$ près de ses 0, avec ses tangentes (sauf si celles-ci sont nulles). Dans ces conditions , on peut écrire : $\gamma \# \sum_i \frac{2s}{\left| \frac{dU}{d\phi} \right|_{\phi=\phi_i}}$ soit $s \# \frac{\gamma}{2} \left[\sum_i \left| \frac{d\phi}{dU} \right|_{\phi=\phi_i} \right]^{-1}$

Dans le cas où, en ϕ_i, $\frac{dU}{d\phi} = 0$, on fait bien sûr intervenir les dérivées d'ordre supérieur .

4-3 Exemples

4-3-1 Dans le § 2 , nous avons vu que l'échantillonnage qui permettait le seuil le plus élevé (à β fixé) était celui qui comportait une discontinuité μ avec un saut $\Delta\mu = 1$. Bien que nous supposions ici que $\ell(x)$ est continue , on peut se rapprocher aussi près que l'on veut de cet échantillonnage . Dans le cas où S(t) est seulement un processus périodique , un tel échantillonnage n'est pas obligatoirement le meilleur.
Les exemples suivants montrent diverses situations possibles .

4-3-2 Exemple 1

Soit le processus périodique S(t), dont la réalisation correspondant à $\Phi = 0$ est le signal triangulaire périodique défini par (fig.2a).

$S_0(t) = 4t$ pour $t \in [0, \frac{1}{4}]$
$S_0(t) = 4t + 2$ pour $t \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$
$S_0(t) = 4t - 4$ pour $t \in [\frac{3}{4}, 1]$

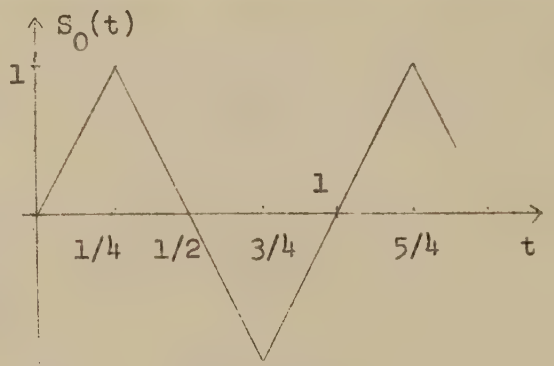

figure 2a

L'échantillonnage est tel que (fig. 2b)

$\ell(x) = 2x$ pour $x \leq \frac{1}{2}$
$\ell(x) = 1$ pour $x \geq \frac{1}{2}$

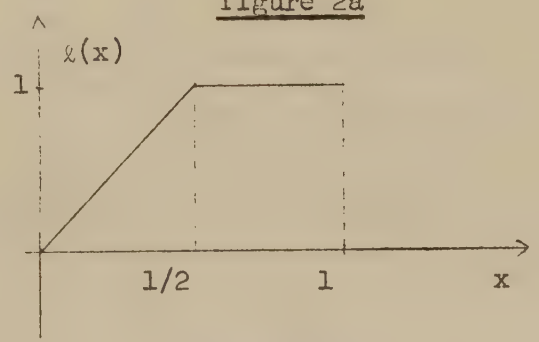

figure 2b

Dans ces conditions, d'après (18) :

$$U(\phi) = \lim_{n\to\infty} A_2(n,\phi) = \int_0^1 S_0(x+\phi)\, d\ell(x) = 2 \int_0^{1/2} S_0(x+\phi)\, dx = \int_\phi^{1+\phi} S_0(u)\, d\ell(u-\phi)$$

avec $d\ell(u-\phi) = 2$ pour $u \in]\phi, \phi + \frac{1}{2}[$

$d\ell(u-\phi) = 0$ pour $u \in]\phi + \frac{1}{2}, \phi + 1[$

d'où $U(\phi) = 2 \int_\phi^{\phi+\frac{1}{2}} S_0(u)\, du$, de période 1 défini par (fig.3)

$$U(\phi) = \frac{1}{2} - 8\phi^2 \qquad \text{si } \phi \in [-\tfrac{1}{4}, +\tfrac{1}{4}]$$

$$U(\phi) = 8\phi^2 - 8\phi + \frac{3}{2} \qquad \text{si } \phi \in [\tfrac{1}{4}, \tfrac{3}{4}]$$

$$U(\phi) = \frac{1}{2} - 8(1-\phi)^2 \qquad \text{si } \phi \in [\tfrac{3}{4}, \tfrac{5}{4}]$$

$$= -8\phi^2 + 16\phi - \frac{15}{2}$$

On peut en déduire l'expression de f(u) , densité de probabilité de $U(\phi)$

$$f(u) = \frac{1}{2\sqrt{1+2u}} \qquad \text{si } u \in]-\tfrac{1}{2}, 0[$$

$$f(u) = \frac{1}{2\sqrt{1-2u}} \qquad \text{si } u \in [0, \tfrac{1}{2}[$$

$f(u) = 0$ ailleurs .

Etant donné β assez près de 1, on cherche $s < \frac{1}{2}$ tel que

$$\Pr\ [|U(\Phi)| > s] > \beta$$

$$\Pr\ [|U(\Phi)| > s] = \int_s^{\frac{1}{2}} \frac{du}{2\sqrt{1-2u}} + \int_{-\frac{1}{2}}^{-s} \frac{du}{2\sqrt{1+2u}} = \sqrt{1-2s} > \beta$$

d'où $s < \frac{1-\beta^2}{2}$

Si $\beta = 1 - \gamma$ avec $\gamma \neq 0$, l'inégalité précédente devient : $s < \gamma$

On se retrouve donc dans les mêmes conditions qu'au § 2, c'est-à-dire que plus β est proche de 1 , plus le seuil doit être pris près de 0, et plus le nombre d'échantillons nécessaires n doit être pris grand pour diminuer l'influence du bruit et du terme résiduel $V(n,\Phi)$.

Si nous échantillonnons maintenant le même processus à l'aide de la suite $\{t_i\}$ définie par $t_i = i$, on trouve aisément $U(\Phi) = S_0(\Phi)$

d'où : $Pr\ [|U(\Phi)| > s] = 1 - s$

L'inégalité $Pr\ [|U(\Phi)| > s] > \beta$ devient $s < 1 - \beta$ ou bien, avec $\beta = 1-\gamma$, $s < \gamma$. A un infiniment petit d'ordre deux près, l'échantillonnage périodique n'est pas meilleur que celui représenté par la figure 2b.

4-3-3 Exemple 2

$S_0(t)$ est la fonction périodique de période 1 définie par :

$S_0(t) = 8t$ pour $t \in [0, \frac{1}{8}]$

$S_0(t) = 8t + 2$ pour $t \in [\frac{1}{8}, \frac{3}{8}]$

$S_0(t) = 8t - 4$ pour $t \in [\frac{3}{8}, \frac{1}{2}]$

$S_0(t) = 0$ pour $t \geq \frac{1}{2}$ (fig.4)

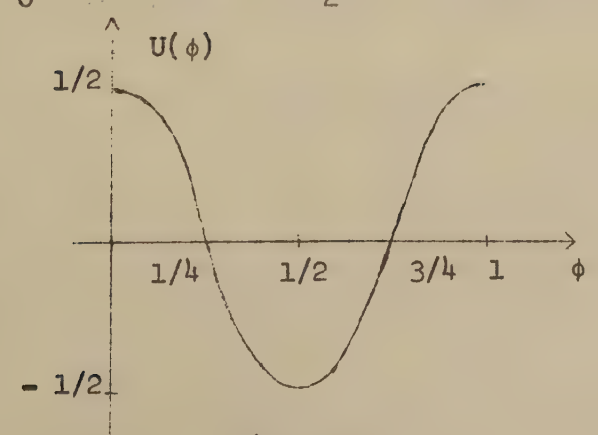

figure 3

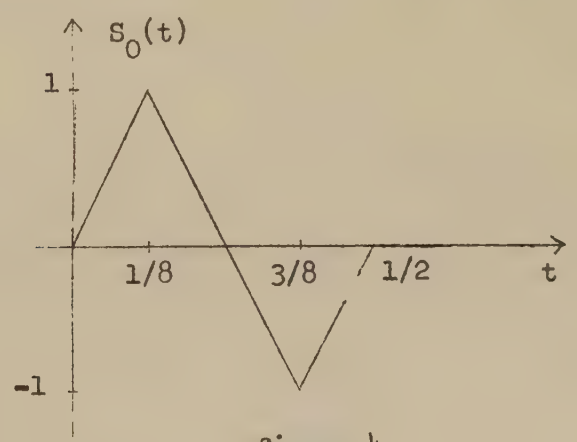

figure 4

L'échantillonnage est défini par :

$$\ell(x) = 4x \text{ pour } x < \frac{1}{4}$$

$$\ell(x) = 1 \text{ pour } x \geq \frac{1}{4}$$

On trouve alors : (fig.5)

$U(\phi) = -32\,\phi^2 + \frac{1}{2}$ pour $\phi \in [0, \frac{1}{8}]$

$U(\phi) = 32\,\phi^2 - 16\,\phi + \frac{3}{2}$ pour $\phi \in [\frac{1}{8}, \frac{1}{4}]$

$U(\phi) = 16\,\phi^2 - 8\,\phi + \frac{1}{2}$ pour $\phi \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{8}]$

$U(\phi) = -16\,\phi^2 + 16\,\phi - 4$ pour $\phi \in [\frac{3}{8}, \frac{1}{2}]$

$U(\phi) = 0$ pour $\phi \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$

$U(\phi) = 16\,(\phi - \frac{3}{4})^2$ pour $\phi \in [\frac{3}{4}, \frac{7}{8}]$

$U(\phi) = -16\,\phi^2 + 32\,\phi - \frac{31}{2}$ pour $\phi \in [\frac{7}{8}, 1]$

D'où la loi de probabilité de $U(\Phi)$, qui comporte une masse m_0 au point u=0 et telle que $m_0 = \frac{1}{4}$

A tout $\beta > 0{,}75$, on ne peut donc pas faire correspondre un seuil $s > 0$ tel que :

Pr $[|U(\Phi)| > s] > \beta$, puisque la masse à l'origine est égale à $\frac{1}{4}$

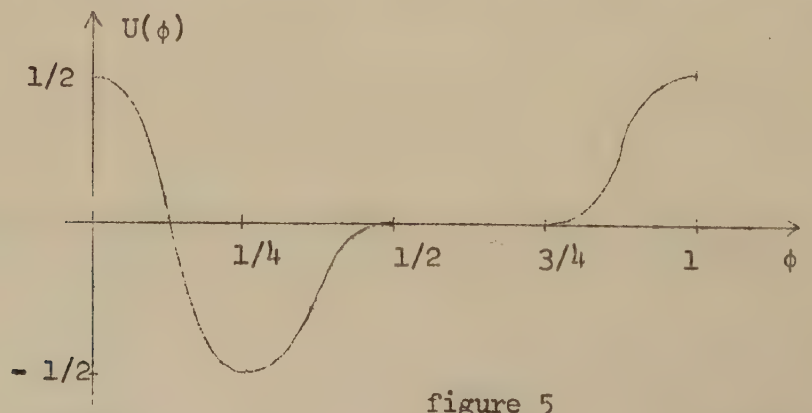

figure 5

4-3-4 Exemple 3

$S_0(t)$ est la fonction périodique de période 1 définie par (fig.6)

$S_0(t) = 16\ t^2$ pour $t \in [0, \frac{1}{4}]$

$S_0(t) = 16(t - \frac{1}{2})^2$ pour $t \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$

$S_0(t) = -16(t - \frac{1}{2})^2$ pour $t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$

$S_0(t) = -16(t-1)^2$ pour $t \in [\frac{3}{4}, 1]$

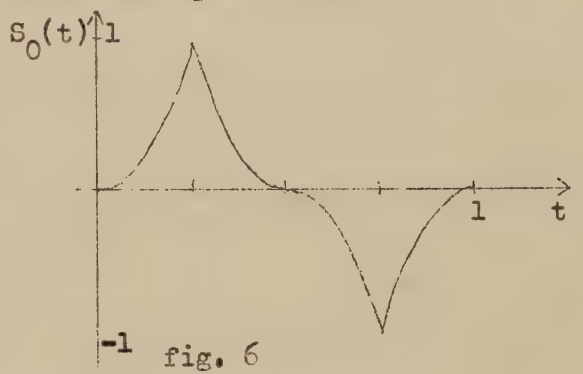

fig. 6

Si $\ell(x)$ est l'échantillonnage défini par $\ell(x) = 1$ pour $x > 0$, on a $U(\phi) = S_0(\phi)$ d'où : $Pr\ [|U(\Phi)| > s] = 1 - \sqrt{s} > 1 - \gamma$ soit : $s < \gamma^2$

Le seuil s doit donc être inférieur au carré de $\gamma = 1 - \beta$.

Soit maintenant l'échantillonnage défini par $\ell(x) = 2x$ pour $x \leq \frac{1}{2}$ (fig. 1b). On trouve alors $U(\phi) = -\frac{64}{3}\ u^3 + 16\ u^2 - 4\ u$ avec $\phi = u + \frac{1}{4}$ et $0 \leq u \leq \frac{1}{4}$. On en déduit l'inégalité $s < \gamma$. Comme γ est petit, $\gamma >> \gamma^2$. Il s'ensuit que la détection par la seconde suite d'échantillonnage est bien meilleure que par la première.

Ceci montre bien que l'échantillonnage périodique synchrone avec le signal n'est pas toujours le meilleur.

4-4 Echantillonnage double

4-4-1 Comme dans le § 3, on peut chercher si un échantillonnage double est susceptible de "détecter en probabilité" un processus périodique. Etant donné deux suites $\{t_i^1\}$ et $\{t_i^2\}$ et le processus S(t) défini par

un de ses échantillons $S_\zeta(t)$, en considère la variable aléatoire $|U^{(1)}(\phi)| + |U^{(2)}(\phi)|$, correspondant à chacun des échantillonnages :

$$U^{(1)}(\phi) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sigma_k^{(1)} \cos 2\pi k(\phi + \psi_k^{(1)} + \theta_k)$$

$$U^{(2)}(\phi) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sigma_k^{(2)} \cos 2\pi k(\phi + \psi_k^{(2)} + \theta_k)$$

α_k et θ_k , $\sigma_k^{(1)}$, $\psi_k^{(1)}$, $\sigma_k^{(2)}$, $\psi_k^{(2)}$, caractérisant $S_0(t)$, $\ell_1(x)$ et $\ell_2(x)$.

Le problème consiste à déterminer un minorant non nul de $|U^{(1)}(\phi)| + |U^{(2)}(\phi)|$. Supposons que l'on ait trouvé une suite $\{t_i^{(1)}\}$ telle que l'application $(\phi \mapsto U^{(1)}(\phi))$ soit bijective par morceaux et continue. Il s'ensuit que, sur $[0,1]$, $U^{(1)}(\phi)$ a un nombre fini de zéros , soit ϕ_1, ϕ_2 ..... ϕ_n . Il suffit donc de trouver une suite $\{t_i^{(2)}\}$ telle que $U^{(2)}(\phi)$ soit continue et ne s'annule pas en même temps que $U^{(1)}(\phi)$. Une telle suite existe toujours. On peut la caractériser par exemple par $\sigma_k^{(2)} = \sigma_k^{(1)}$, $\forall\, k$, et $\psi_k^{(2)} = \psi_k^{(1)} + \xi$. En effet, il est clair que $U^{(2)}(\phi)$ s'annule aux points $(\phi_1 - \xi) \bmod 1, \ldots\ldots, (\phi_n - \xi) \bmod 1$. Pour qu'il y ait "détection en probabilité" , il suffit que $(\phi_i - \xi) \bmod 1 \neq \phi_k$, $\forall\, i,k = 1,2 \ldots n$, ce qui est évidemment toujours possible. Il paraît par contre difficile de déterminer le minimum de $|U^{(1)}(\phi)| + |U^{(2)}(\phi)|$ qui correspond au seuil maximum de détection : les développements en série de

Fourier ne peuvent qu'indiquer son existence .

Il est d'ailleurs évident que les suites $\{t_i^{(2)}\}$ construites à partir de $\{t_i^{(1)}\}$ ne donneront pas en général le seuil optimum.

Ce qui précède montre que, dans un très grand nombre de cas, la "détection en probabilité" d'un processus périodique noyé dans le bruit est possible.

4-4-2 Exemple

Reprenons l'exemple 1 du § 4-3-2 avec $S_0(t)$ défini par

$$S_0(t) = 4t \qquad \text{pour } t \in [0, \tfrac{1}{4}]$$

$$S_0(t) = -4t+2 \qquad \text{pour } t \in [\tfrac{1}{4}, \tfrac{3}{4}]$$

$$S_0(t) = 4t-4 \qquad \text{pour } t \in [\tfrac{3}{4}, 1]$$

et $$\ell^{(1)}(x) = 2x \qquad \text{pour } x \leq \tfrac{1}{2}$$

$$\ell^{(1)}(x) = 1 \qquad \text{pour } x \geq \tfrac{1}{2}$$

Alors $$U^{(1)}(\phi) = \tfrac{1}{2} - 8\phi^2 \qquad \text{pour } \phi \in [0, \tfrac{1}{4}]$$

$$U^{(1)}(\phi) = 8\phi^2 - 8\phi + \tfrac{3}{2} \qquad \text{pour } \phi \in [\tfrac{1}{4}, \tfrac{3}{4}]$$

$$U^{(1)}(\phi) = -8\phi^2 + 16\phi - \tfrac{15}{2} \qquad \text{pour } \phi \in [\tfrac{3}{4}, 1]$$

On opère un déphasage sur $\{t_i^{(1)}\}$ de façon à générer la suite $\{t_i^{(2)}\}$ telle que $\ell^{(2)}(x)$ soit déphasée de ξ par rapport à $\ell^{(1)}(x)$. Alors $U^{(1)}(\phi)$ et $U^{(2)}(\phi)$ sont déphasées de la même quantité .

D'où $U^{(2)}(\phi)$:

$$U^{(2)}(\phi) = \frac{1}{2} - 8\,(\phi-\xi)^2 \qquad \text{pour } \phi \in [0, \tfrac{1}{4}]$$

$$U^{(2)}(\phi) = 8(\phi-\xi)^2 - 8(\phi-\xi) + \frac{3}{2} \qquad \text{pour } \phi \in [\tfrac{1}{4}, \tfrac{3}{4}]$$

$$U^{(2)}(\phi) = -8(\phi-\xi)^2 + 16(\phi-\xi) - \frac{15}{2} \qquad \text{pour } \phi \in [\tfrac{3}{4}, 1]$$

La borne supérieure du minimum de $|U^{(1)}(\phi)| + |U^{(2)}(\phi)|$ est obtenue pour $\xi = \frac{1}{4}$ (ou $\xi = \frac{3}{4}$) . Elle est égale à $\frac{1}{2}$. Si donc on choisit un seuil $s < \frac{1}{2}$, on détectera en probabilité le signal $\xi(t)$ à l'aide des deux suites $\{t_i^{(1)}\}$ et $\{t_i^{(2)}\}$ précedemment définies .

5- Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons vu que l'échantillonnage d'un processus de Khintchine pouvait être considéré comme un procédé de détection d'un signal dans un bruit.

Si le signal est sinusoïdal, le problème de sa détection se résout d'une manière satisfaisante en ce sens que, étant donné une suite d'échantillonnage caractérisée par sa fonction de répartition $\ell(x)$, on peut déterminer un seuil s et une probabilité β associée tels que, pour un nombre très grand d'échantillons, $1 - \beta$ est la probabilité de fausse alarme . Si le nombre d'échantillons prélevés n'est pas très grand, la probabilité de fausse alarme augmente, sa détermination dépendant de la structure du bruit et de propriétés fines de la suite d'échantillonnage, comme la vitesse de

convergence de $\frac{F(n,x)}{n}$ vers $\ell(x)$.

Un double échantillonnage d'un signal sinusoïdal noyé dans le bruit est bien plus satisfaisant. Dans ce cas, en effet, on peut définir une "détection en probabilité" , cette expression étant liée à la notion de convergence en probabilité. Cependant, on ne résout pas ici non plus le problème du nombre minimum d'échantillons à prélever de façon à minorer les probabilités d'erreur.

Dans le cas d'un signal périodique, il semble difficile d'élaborer une théorie générale. Les exemples donnés montrent que chaque cas doit se traiter comme cas d'espèce. L'expérimentation précisera peut-être les paramètres importants. Peut-être, alors, pourrons-nous élaborer une étude plus détaillée.

C H A P I T R E - VIII -

APPLICATION à la RECONNAISSANCE

DES

FORMES PERIODIQUES

1- Position du problème

1-1 Nous appellerons forme périodique, un processus de Khintchine périodique, c'est-à-dire un processus stationnaire au sens large, stochastiquement continu et dont la fonction d'autocorrélation est périodique.

Considérons le processus X(t) défini par $X(t) = B(t) + \sum_{i=1}^{n} \partial_i X_i(t)$, où :

- B(t) est un "bruit" stationnaire au sens large, de moyenne nulle.
- Les $X_i(t)$ sont des formes périodiques de même période 1 , de moyennes nulles, indépendantes entre elles et indépendantes de B(t) .
- ∂_i est égal à 0 ou à 1

On se pose le problème suivant : est-il possible, par échantillonnage multiple de X(t) , de décider de la présence ou de l'absence de la forme $X_i(t)$?

Nous envisagerons tout d'abord le cas où X(t) est échantillonné par n suites $\{t_i^j\}$, $j = 1,2..... n$, caractérisées par leur fonction de répartition modulo 1, $\ell_j(x)$. Nous supposerons comme dans le chapitre précédent que les diverses suites croissent suffisamment vite pour que l'influence de B(t) puisse être négligée.

Nous dirons dans ce cas que $X_k(t)$ est reconnaissable dans X(t) par la suite $\{t_i^k\}$ s'il existe ε_k et α_k tels que $\alpha_k > \varepsilon_k$ et

$$- \text{Var } \hat{m}_\infty^k \geq \alpha_k \qquad \text{si} \quad \partial_k = 1$$

$$- \text{Var } \hat{m}_\infty^k \leq \varepsilon_k \qquad \text{si} \quad \partial_k = 0 \qquad (1)$$

$\hat{m}_n^k$ étant l'estimateur de la moyenne (nulle) de X(t) par la suite $\{t_i^k\}$.

Le rapport $\frac{\alpha_k}{\varepsilon_k}$ sera appelé facteur de reconnaissance .

1-2 Nous supposerons dans un premier temps que $\ell_k(x)$ est continue $\forall$ k = 1 ..... n , et définie par la série de Fourier $\frac{d\ell_k}{dx} = \sum_{i=0}^{\infty} \sigma_i^k \cos 2\pi\, i(x - \phi_i)$.

La fonction d'autocorrélation de $X_k(t)$ sera $\rho_k(\tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^k \cos 2\pi\, i\tau$.

On admettra que $\frac{d\ell_k}{dx}$ est suffisamment régulière pour que $\text{Var } \hat{m}_\infty^k = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^j (\sigma_i^k)^2$ si $\partial_j = 1$, $\partial_m = 0$ pour $m \neq j$. (2)

Si on suppose enfin que les formes $X_k(t)$ ont des spectres limités au $q^{\text{ième}}$ harmonique, (2) s'écrit :

$$4 \text{ Var } \hat{m}_\infty^k = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i^j (\sigma_i^k)^2 \quad \text{si} \quad \partial_j = 1 , \quad \partial_m = 0 \quad \text{pour } m \neq j$$

ou bien $4 \text{ Var } \hat{m}_\infty^k = \sum_{i=1}^{q} \left(\Sigma_m \lambda_i^m \right) (\sigma_i^k)^2$, la somme $\sum_m \lambda_i^m$ étant étendue aux indices m tels que $\partial_m = 1$

D'après (1), la forme $X_k(t)$ sera reconnue par la suite $\{t_i^k\}$ si

$$\sum_{i=1}^{q} \lambda_i^k (\sigma_i^k)^2 = \alpha_k^k \geq 4\alpha_k$$

$$\sum_{i=1}^{q} \lambda_i^m (\sigma_i^k)^2 = \varepsilon_k^m \quad \text{avec} \quad \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{n} \varepsilon_k^m \leq 4\varepsilon_k \qquad (3)$$

De façon à ce que toutes les formes $X_k(t)$ soient reconnues, le système (3) est étendu à toutes les valeurs de k = 1, 2,....., n .

Les λ_i^k étant donnés, on obtient ainsi un système de n^2 équations dont les inconnues sont les $(\sigma_i^k)^2$.

Le problème est le suivant : est-il possible de déterminer les nq inconnues $(\sigma_i^k)^2$, non négatives, de façon à ce que les seconds membres, c'est-à-dire α_k^k , ε_k^m , non négatifs, soient assujettis aux inégalités

$$\sum_{\substack{m=1 \\ m\neq k}}^{n} \varepsilon_k^m < \alpha_k^k \quad , \quad k = 1,2,..... n \ ?$$

La réponse dépend des propriétés de la matrice $\Lambda = [\lambda_i^k]$, à n lignes et q colonnes .

En effet le système (3) est équivalent à l'ensemble des systèmes $\Lambda U_k = V_k$ où :

a) $\Lambda = [\lambda_i^k]$ est la matrice rectangulaire dont les éléments de la jième ligne sont les coefficients de Fourier de $\rho_j(\tau)$, fonction d'autocorrélation de $X_j(t)$. L'indice supérieur (k) représente la ligne et l'indice inférieur (i) , la colonne.

b) U_k est la matrice colonne des $(\sigma_i^k)^2$, (k fixé et i variant de 1 à q) , σ_i^k étant le module du ième harmonique de $\frac{d\ell_k}{dx}$.

c) V_k est la matrice colonne des seconds membres. Elle comporte n éléments, celui de la kième ligne est α_k^k , celui de la ième ($i \neq k$) , est ε_k^i .

2- Matrices n-détectrices

2-1 Définition R^n et R^q sont rapportés à leurs bases canoniques respectives $\{e_i\}_{i=1,2....n}$ et $\{e_j\}_{j=1,2...q}$. On suppose dans la suite que $n \leq q$.

$A = [a^i_j]_{\substack{i=1.....n \\ j=1.....q}}$ désigne une matrice réelle à n lignes et q colonnes, l'indice supérieur représente donc la ligne et l'indice inférieur, la colonne .

Définition 1 : $v = \sum_{i=1}^{n} v^i e_i$, vecteur de R^n , est k-positif excédentaire si

$$v^k - \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} v^i > 0 .$$

Définition 2 : A est dite matrice positive excédentaire si, et seulement si, quelque soit $k = 1,2..... n$, il existe $j(k) \in \{1,2....q\}$ tel que $\alpha^k_j = a^k_j - \sum_{\substack{m=1 \\ m\neq k}}^{n} a^m_j > 0$

Autrement dit, un vecteur de R^n est k-positif excédentaire si la différence entre sa kième composante et la somme de ses autres composantes est positive.

De la même façon, la matrice A sera positive excédentaire si n au moins de ses vecteurs colonnes sont positifs excédentaires. Dans chacune

des lignes de A, on trouvera donc un élément a_j^k appartenant à la colonne j(k), tel que la différence entre a_j^k et la somme des autres éléments de la même colonne est positive.

2-2 Théorème 1

H Soit $\{v_i\}$ i = 1,2,.....,n , un ensemble de vecteurs de R^n tels que v_i est i-positif excédentaire, $\forall$ i .

C Une C.N.S. pour qu'il existe un ensemble $\{u_i\}$ i = 1,2.....n de vecteurs de R^q dans le premier hyperoctant, tels que $Au_i = v_i$, $\forall i$, est que A soit positive excédentaire.

Condition nécessaire

Supposons que $Au = v$ avec $u = \sum_{j=1}^{q} u^j e_j$ et $u^j \geq 0$, $\forall$ j , de façon que u soit dans le premier hyperoctant de R^q.

Si $v = \sum_{j=1}^{n} v^j e_j$, est k-positif excédentaire, c'est que

$$\gamma^k = v^k - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} v^j > 0$$

D'après la définition 2, $Au = v$ implique $\gamma^k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^k u^i > 0$

Comme les u^i sont positifs ou nuls, ceci entraîne que, au moins un des α_i^k , par exemple α_j^k , est positif. En conséquence A est positive excédentaire.

Condition suffisante

Soit A positive excédentaire. A la ligne k correspond une colonne

j telle que $\alpha_j^k > 0$.

L'équation $\gamma^k = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i^k \, u^i$ a par exemple comme solution $u^i = 0$ si $i \neq j$ et $u^j = \dfrac{\gamma^k}{\alpha_j^k}$ qui est positif . Le vecteur u est bien situé dans le premier hyperoctant de R^q .

2-3 Théorème 2

H A est positive excédentaire

C Dans tout pavé fermé $P = \prod_{i=1}^{q} [0, \mu_i]$ de R^q , $(\mu_i > 0)$, il existe un vecteur u , tel que $Au = v$, où v est k-positif excédentaire maximal, k étant fixé mais quelconque dans {1,2..... n}

Dans P, il existe u tel que Au est k-positif excédentaire . Par exemple le vecteur u défini par $u^i = 0$ si $i \neq m$, $u^m \in [0, \mu_m]$, m étant un indice tel que

$$\alpha_m^k = a_m^k - \sum_{i \neq k} a_m^i > 0 \, . \qquad \text{Alors } \gamma^k = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^k \, u^j > 0$$

D'autre part, à k donné, il existe des $\alpha_m^k \leq 0$ et des $\alpha_r^k > 0$ qui définissent deux ensembles d'indices I et J , $(m \in I, r \in J)$ tels que $I \cap J = \phi$, $I \cup J = \{1,2.....q\}$. J n'est pas vide, sans quoi A ne serait pas positive excédentaire.

On peut écrire : $\gamma^k = \sum_{m \in I} \alpha_m^k \, u^m + \sum_{r \in J} \alpha_r^k \, u^r$

Le maximum de γ^k est obtenu pour $u^m = 0$, $\forall m \in I$, et $u^r = \mu_r$, $\forall r \in J$.

2-4 Théorème 3

Définition 3 A est une matrice n-détectrice, si A est positive excédentaire et si, de plus, tous les a_j^i sont non négatifs.

Théorème 3 Si A est n-détectrice, alors rang(A) = n

Il suffit de démontrer le théorème pour une matrice carrée d'ordre n. On n'enlève rien à la généralité en supposant que

$$a_i^i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_i^j > 0 \quad , \forall\, i = 1,2,\ldots\ldots\, n$$

Décomposons A sous la forme suivante :

$$A = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} & & \\ & A' & \\ & & \end{bmatrix} & \begin{matrix} a_n^1 \\ \vdots \\ a_n^{n-1} \end{matrix} \\ a_1^n \ldots\ldots\ldots\ a_{n-1}^n & a_n^n \end{bmatrix}$$

Si A est n détectrice, A' est à fortiori (n-1) détectrice, puisque les a_i^p , $\forall i = 1,\ldots\ldots, n-1$, sont non négatifs. Supposons que le déterminant $|A'|$ est positif. ($|A'| > 0$) . Nous allons démontrer qu'alors $|A|$ est aussi positif.

Posons $u' = \begin{bmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^{n-1} \end{bmatrix}$ et $v' = \begin{bmatrix} a_n^1 \\ \vdots \\ a_n^{n-1} \end{bmatrix}$

Le système $A' u' = v'$ admet une solution u' unique, puisque $|A'| > 0$.
D'autre part, les a_n^i étant non négatifs, $A'u'$ est dans le premier hyperoctant de R^{n-1} . De plus il est bien connu que l'on peut écrire :

$$|A| = \left(a_n^n - \sum_{j=1}^{n-1} a_j^n \; u^j \right) |A'| \qquad (4)$$

or $$a_n^n > \sum_{i=1}^{n-1} a_n^i = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} a_j^i \; u^j$$

D' où $$a_n^n - \sum_{j=1}^{n-1} a_j^n \; u^j > \sum_{j=1}^{n-1} u^j \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_j^i - a_j^n \right) \qquad (5)$$

Pour $j \neq n$, $\sum_{i=1}^{n-1} a_j^i - a_j^n$ est positif car supérieur à $a_j^j - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} a_j^i$.

Si tous les u^i sont nuls $(a_n^j = 0, \forall j = 1, \ldots\ldots n-1)$, $|A| = a_n^n \; |A'| > 0$ d'après (4) .

Si tous les u^i sont non négatifs et au moins un d'entre eux positif, on obtient, d'après (4) et (5) :

$$a_n^n - \sum_{j=1}^{n-1} a_j^n \; u^j > 0 \qquad \text{d'où } |A| > 0$$

Reste le cas où certains des u^j sont négatifs .Soit J l'ensemble des j tels que $u^j < 0$. J est strictement inclus dans l'ensemble {1,2.....n-1} sans quoi tous les a_n^i , i = 1, ... n-1 , seraient négatifs, ce qui est contraire aux hypothèses .

Si I est le complémentaire de J par rapport à {1,2..... n-1}

$$a_n^n - \sum_{j=1}^{n-1} a_j^n \, u^j > a_n^n - \sum_{j \in I} a_j^n \, u^j \geq \sum_{j=1}^{n-1} \omega^j \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_j^i - a_j^n \right)$$

avec $\omega^j = u^j$ pour $j \in I$

$\omega^j = 0$ pour $j \in J$

Comme $\sum_{i=1}^{n-1} a_j^i - a_j^n$ est positif $\forall$ i = 1,2..... n-1 , il s'ensuit que

$a_n^n - \sum_{j=1}^{n-1} a_j^n \, u^j$ est aussi positif d'où $|A| > 0$, d'après (4)

Ainsi, on a démontré que, si $|A'| > 0$, alors, $|A| > 0$

Il suffit de démontrer maintenant que $|A| > 0$ pour n = 2 .

Si $A = \begin{bmatrix} x & y \\ x' & y' \end{bmatrix}$ avec $x > x' \geq 0$, $y' > y \geq 0$, $|A| = xy' - x'y > 0$,

d'où le théorème.

3- Généralisation : matrices (n,β)-détectrices

On désire généraliser la notion de matrice n-détectrice , de façon

à faire apparaître le rapport :

$$\eta = v^k \Big(\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} v^i \Big)^{-1} > 1$$ portant sur le second membre des

équations linéaires .

3-1 Définition 1^1

$v = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} v^i e_i$ vecteur de R^n, est (k,η)-positif excédentaire si

$v^k - \eta \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} v^i > 0$

Définition 2^1

A est dite matrice η-positive excédentaire si et seulement si, quelque soit $k = 1,2.... n$, il existe $j(k) \in \{1,2..... q\}$ tel que

$$\alpha_j^k = a_j^k - \eta \sum_{\substack{m=1 \\ m\neq k}}^{n} a_j^m > 0$$

3-2 Théorème 1^1

H Soit $\{v_i\}_{i=1,2.... n}$, un ensemble de vecteurs de R^n tels que v_i est (i,η)-positif excédentaire, $\forall$ i .

C Une C.N.S. pour qu'il existe un ensemble $\{u_i\}i = 1,2..... n$ de vecteurs de R^q dans le premier hyperoctant, tels que $A\, u_i = v_i$, est que A soit η-positive excédentaire.

Soit v, (k,η)-positif excédentaire, et $\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega^i e_i$ avec $\omega^i = \eta v^i$ si $i \neq k$ et $\omega^k = v^k$. ω est donc k-positif excédentaire.

On se ramène au théorème 1, car le système $Au = v$ est équivalent au système $Bu = v$, avec $B = [b^i_j]$ telle que $b^i_j = \eta\, a^i_j$ si $i \neq k$ et $b^k_j = a^k_j$, $\forall j=1,2....q$.

3-3 Théorème 2^1

H — A est η-positive excédentaire

C — Dans tout pavé fermé $P = \prod_{i=1}^{q} [0, \mu_i]$ de R^q, $(\mu_i > 0)$,

il existe un vecteur u, tel que $Au = v$, où v est (k,η)-positif excédentaire maximal, k étant fixé mais quelconque dans {1,2,..... n} .

u, solution de $Au = v$ sera (k,η)-positif excédentaire maximal lorsque u, solution de $Bu = \omega$ sera k-positif excédentaire maximal c'est-à-dire pour $u^m = 0$, $\forall\ m \in I$, $u^r = \mu_r$, $\forall\ r \in J$, J étant un ensemble d'indices non vide.

3-4 Théorème 3'

Définition 3' — A est une matrice (n,η)-détectrice, si A est η-positive excédentaire et si de plus, tous les a^i_j sont non négatifs.

Théorème 3' — Si A est (n,η)-détectrice, alors rang(A)=n.

A étant (n,η)-détectrice, elle est à fortiori n-détectrice, d'où le théorème.

Remarquons, que ce théorème n'est valable que si $\eta \geq 1$. Par contre, les théorèmes 1' et 2' restent valables pour $0 < \eta < 1$.

4- Reconnaissance de n formes par n échantillonnages

La matrice Λ définie dans § 1 est composée des nq coefficients de Fourier des fonctions d'autocorrélation $\rho_i(\tau)$, $i = 1,\ldots\ldots n$, des formes $X_i(t)$. V_k est la matrice colonne composée des nombres non négatifs $\varepsilon_k^1 \ldots\ldots \varepsilon_k^{k-1}$, α_k^k , ε_k^{k+1} ,..... ε_k^n tels que, $\alpha_k^k \left(\sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{n} \varepsilon_k^m \right)^{-1} > \eta$ donné. On cherche un ensemble de matrices colonnes U_k telles que $\Lambda U_k = V_k$, $k = 1,2,\ldots\ldots n$, les composantes des vecteurs U_k étant non négatives. D'après le théorème 3' , une C.N.S. pour que le système $\Lambda U_k = V_k$, $\forall$ $k = 1,2,\ldots. n$, ait de telles solutions est que Λ soit une matrice (n,η)-détectrice, puisque les λ_j^i sont tous non négatifs.

Autrement dit, pour qu'il existe un ensemble de n échantillonnages susceptible de détecter les n formes $Y_i(t)$, avec un facteur de reconnaissance η , il faut et il suffit que sur les q harmoniques de la forme $X_i(t)$, il y en ait un (par exemple la jième) dont la puissance est supérieure à η fois la somme des puissances concentrées dans les harmoniques de rang j des (n-1) autres formes .

Si les signaux à reconnaître sont judicieusement choisis, il suffira donc de leurs n premiers harmoniques pour les reconnaître.

Remarquons enfin que, les V_k étant donnés (k,n)-positifs excédentaires, et A étant elle-même (n,n)-détectrice, les solutions U_k sont uniques, puisque $|A| > 0$.

C O N C L U S I O N

Conclusion

L'étude de l'échantillonnage des processus de KHINTCHINE revient à celle de suites de variables aléatoires en général non stationnaires. Des travaux récents (A. BLANC-LAPIERRE) ont montré que la loi forte des grands nombres s'applique à certains processus échantillonnés par des suites aléatoires. Ici, nous avons étudié l'échantillonnage des processus de KHINTCHINE par des suites déterministes.

Dans l'étude de la convergence m. q. vers 0 de $\hat{m}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X(t_i)$, estimateur de la moyenne (nulle) du processus $X(t)$, nous avons considéré séparément les deux doubles sommes $A_1 = \frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^{n} \rho_1(t_i - t_j)$ et $A_2 = \frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^{n} \rho_2(t_i - t_j)$, $\rho_1(\tau)$ et $\rho_2(\tau)$ des fonctions d'autocorrélation telles que $\lim_{\tau \to \infty} \rho_1(\tau) = 0$ et $\rho_2(\tau)$ presque périodique.

Nous donnons trois théorèmes sur la convergence vers 0 de $A_1(n)$, et des exemples mettant en évidence la liaison avec la croissance de la suite $\{t_i\}$. L'étude de $A_2(n)$ nous a conduit à considérer $\ell(x)$, fonction de répartition de la suite $\{t_i\}$ modulo une des pseudo-périodes de $\rho_2(\tau)$.

Nous avons établi les C. N. S. de convergence vers 0 de $A_2(n)$, dans les cas suivants : $\ell(x)$ continue, continue par morceaux, et discontinue avec un nombre fini de points d'accumulation de discontinuités.

En partant d'un aspect différent de ce même problème, nous étions conduits à élaborer une méthode de génération de suites dont les fonctions de repartition sont des interpolées linéaires. Cette méthode est basée sur le filtrage et la réunion de suites uniformément réparties.

Réciproquement, étant donné une fonction de répartition $\ell(x)$ formée d'un nombre fini de segments de droites, nous démontrons qu'il est toujours possible de générer une suite dont la fonction de répartition est précisément $\ell(x)$.

Nous appliquons ce qui précède à généraliser la notion de détection synchrone, et nous montrons qu'un échantillonnage approprié peut conduire à la reconnaissance de formes périodiques parmi d'autres formes de même période.

En résumé, en plus de leur construction, nous avons étudié l'influence de certaines structures de suites d'échantillonnage sur la convergence d'un estimateur classique, et les applications possibles dans le cas où cet estimateur est divergent.

B I B L I O G R A P H I E

[1] HADAMARD Atti del Congr. Intern dei Matem . Bologne 1928 p. 133-139.

[2] A. KHINTCHINE Korrelations theorie der stationären stochastischen prozesse Annalen der Mathematik (1934), 109 , p. 604-615.

[3] S. BOCHNER Verlesungen über Foursiersche Intégrale Akad. Verlagsges, Leipzig, 1932.

[4] E. SLUTSKY Sur les fonctions aléatoires presque périodiques et sur la décomposition des fonctions aléatoires stationnaires en composantes. Act. Sc. et ind. n° 738, Paris, Hermann, 1938, p. 33-55.

[5] J. KAMPE de FERIET Sur les fonctions aléatoires stationnaires et la théorie statistique de la turbulence homogène. Ann. Soc. Sc. de Bruxelles, s.1 , t.59 ,1939, p. 145-194.

[6] E. LUKACS Fonctions caractéristiques Dunod, 1964

[7] M. CRAMER On the theory of stationnary random processes Annals of math. s.2, t.41, 1940, p 215-230.

[8] M. LOEVE Sur la covariance d'une fonction aléatoire C.R.A.S., t.220, 5-3-45 , p 295-296.

[9] M. LOEVE Sur les fonctions aléatoires stationnaires du second ordre Revue Sc. t.83, 1945, p 297-303.

[10] P. LEVY Processus stochastiques et mouvement brownien Gauthier-Villars, 1965 2è ed.

[11] H. CRAMER, M.R. LEADBETTER Stationnary and related stochastic processes Wiley , 1967.

[12] KY FAN Les fonctions définies positives et les fonctions complètement monotones. Mémorial des Sc. Math, n° 114 Gauthier Villars, 1950 .

[13] GNEDENKO — Introduction à la théorie des probabilités.

[14] P. REVESZ — The laws of Large Numbers
Academic Press, 1968.

[15] R. FORTET — Eléments de la théorie des Probabilités
C.N.R.S, 1965.

[16] P. LEVY — Théorie de l'addition des variables aléatoires
Gauthier-Villars, 1954.

[17] A. BLANC-LAPIERRE — Sur quelques propriétés ergodiques de certaines fonctions aléatoires.
C.R.A.S. 26-6-44 , p . 985-986.

[18] A. BLANC-LAPIERRE et R. BRARD — La loi forte des grands nombres pour les fonctions aléatoires stationnaires continues.
C.R.A.S. t. 220, 45, p. 134-136.

[19] A. BLANC-LAPIERRE et R. BRARD — Les fonctions aléatoires stationnaires et la loi des grands nombres.
Bull. Soc. Math de France, t.74, 1946, p. 102-115.

[20] A. KHINTCHINE — Über stazionäre Reihen zufälliger Variablen
Matematiceskij Sbornik , 1933, t.40, n°2, p . 124-128.

[21] E. PARZEN — Stochastic Processes
Holden-Day series in probability and statistics 1965-3è ed.

[22] A. BLANC-LAPIERRE — Echantillonnage et détermination des moyennes temporelles dans le cas des fonctions aléatoires stationnaires d'ordre deux.
C.R.A.S. , t. 264 , 26-6-67, P. 1170-73.

[23] A. BLANC-LAPIERRE — Remarques sur certain problèmes d'échantillonnage aléatoire liés à la détermination des moyennes temporelles.
C.R.A.S. t. 267, 7-10-68 , p. 517-20.

[24] A. BLANC-LAPIERRE,A. TORTRAT — Loi forte des grands nombres pour les fonctions aléatoires d'ordre 2 et changement aléatoire d'horloge.
C.R.A.S. 4-5-70 t. 270 n°18 p. 1186-9.

[25] A. BLANC-LAPIERRE,et R. FORTET — Théorie des fonctions aléatoires
Masson 1953.

[26] M. WEYL — Uber die Gleichverteilung von Zahlen modulo Eins
Math. Annalen, 77, 1916, p. 313-52.

[27] J. BASS — Exercices de mathématiques
Masson, 1965, ex. 7 et 16.

[28] J.W.S. CASSELS — An introduction to diophantine approximation
Cambridge University Press, 1957.

[29] Y.A. SHREIDER — Method of statistical testing
Elsevier Prob. 1964.

[30] J. BASS et J. GUILLOUD — Methode de Monte-Carlo et suites uniformément denses.
Chiffres 1, 1958, p. 149-55.

[31] J. BASS — Suites uniformément denses, moyennes trigonométriques, fonctions pseudo-aléatoires.
Bull. Soc. Math. de France, 87, 1959, p. 1-67.

[32] J. BASS — Nombres aléatoires, suites arithmétiques, méthode de Monte-Carlo.
Pub. de l'Inst. Stat. de l'Université de Paris,
Vol IX, Fasc. 3, p. 289-325.

[33] J.P. BERTRANDIAS — Calcul d'une intégrale au moyen de la suite $X_n = \Lambda_n$. Evaluation de l'erreur. Inst. de Stat. Université de Paris.

[34] T.C. ANDERSON — Fortune Wheel process for generating pseudo-random numbers. Instruments and contral systems, 1-6-2 , p. 129-31.

[35] I. NIVEN — Uniform distribution of sequences of integers University Oregon .

[36] B.F. GREEN — Empirical Tests of an Additive Random Number Generator. J. Assoc. Comput. Math. 6, n°4 527-537 (1959).

[37] G. SPENSER — Random numbers and their generation Whippany , New Jersey Computer and automation

[38] M.G. KENDALL, B.B. SMITH Randomness and Random Sampling Numbers J. Royal Stat. Soc, 101, n°1 , p. 147-166 (1938).

[39] E. MOURIER — Sur les probabilités de fausse alarme et de non détection et rapport signal sur bruit. Colloque G.R.E.T.S.I. , 5-5-69 , p. 905-16.

[40] D. MIDDLETON — Introduction to Statistical Communication théory. Mac Graw Hill 1960.

[41] C.W. MELLSTRON — Statistical Theory of Signal Detection Pergamon, 1960.

[42] L.A. WAINSTEIN, D. ZUBAKOV Extraction of Signals from Noise. Prentice Hall , 1962.

[43] I. SELIN — Detection Theory. Prenceton , 1965.

[44] J.C. HANCOCK, P.A. WINTZ Signal detection theory
Mac Graw Hill, 1966.

[45] A. BLANC-LAPIERRE Modèles statistiques pour l'étude de phénomènes de fluctuations
Masson, 1963.

[46] A. BLANC-LAPIERRE et B. PICINBONO Propriétés statistiques du bruit de fond
Masson 1961.

[47] HADAMARD Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique.
HERMANN, 1903.

[48] M. PARODI Sur quelques propriétés des valeurs caractéristiques des matrices carrées.
Mémorial des Sc. Math. Gauthier-Villars n° 118.

Publications de l'auteur sur ce sujet

1- Sur une méthode de détection d'un signal dans un bruit par échantillonnage non périodique.

En collaboration avec J.C. HOFFMANN et P. CSILLAG
C.R.A.S. t. 268 p. 1414-1416 9.6.69

2- Réunions finies de suites et génération de nombres dont la fonction de répartition est une interpolée linéaire.

C.R.A.S. t. 269 p.1000-1002 24.11.69

3- Echantillonnages discontinus de processus de KHINTCHINE

C.R.A.S. t. 270 p 610-612 2.3.70

4- Sur la reconnaissance de formes périodiques par échantillonnages simultanés

En collaboration avec J. CASSINET et J.C. HOFFMANN
C.R.A.S. t. 270 p. 780-782 23.3.70

5- Sur la convergence en moyenne quadratique de certains échantillonnages

C.E.T.H.E.D.E.C n° 20 4ème tr. 1969 p. 59-77

6- Sur la convergence en moyenne quadratique de certains échantillonnages discontinus.

A paraître.

7- Sur les réunions de suites et l'interpolation linéaire de fonctions de répartition.

A paraître.

T A B L E DES M A T I E R E S

1- Introduction

1- Processus de KHINTCHINE p. 1
2- Loi des grands nombres 4
3- Générations de suites 6
4- Application à la détection 8

2- Convergence de $\hat{m}_n$ lorsque $\lim_{\tau \to \infty} \rho(\tau) = 0$

1- Introduction 11
2- Théorème 1 11
3- Théorème 2 13
4- Théorème 3 17
5- Conclusion 24

3- Convergence de $\hat{m}_n$ lorsque $\rho(\tau)$ est presque périodique
$\ell(x)$ est continue

1- Introduction 25
2- Etude de la suite $\{\alpha_i - \alpha_j\}_{i,j \in N \times N}$ 25
Théorèmes 4,5, et 6.
3- Applications 38
Théorèmes 7 et 8
4- Généralisation 1 , Théorème 9 44
5- Généralisation 2 , Théorème 10 50
6- Conclusion 52

4- Convergence de $\hat{m}_n$ lorsque $\rho(\tau)$ est presque périodique
$\ell(x)$ a un nombre fini de discontinuités.

1- Introduction p. 53
2- Hypothèses 53
3- Décomposition de $\{t_i\}$ 56
4- Etude de $A_1(n,\varepsilon)$ 58
5- Etude de $A_2(n,\varepsilon)$ 61
6- Etude de $A_3(n,\varepsilon)$ 61
7- Cas particulier : $\rho(\tau) = \cos 2\pi\tau$. Théorèmes 11 et 12 67
8- Cas particulier : $\rho(\tau)$ périodique 75
9- $\rho(\tau)$ presque périodique 77
10- Echantillonnage à plusieurs discontinuités . Théorème 13. 78

5- Convergence de $\hat{m}_n$ lorsque $\rho(\tau)$ est presque périodique
$\ell(x)$ a un nombre fini de points d'accumulation de discontinuités

1- Introduction 85
2- Expression de Var $\hat{m}_n$ 85
3- Calcul de Var $\hat{m}_\infty$ 87
4- Cas particulier : $\rho(\tau) = \cos 2\pi\tau$ 100
5- $\rho(\tau)$ périodique ou presque périodique 102

6- Génération de suites dont la fonction de répartition est une interpolée linéaire

1- Introduction 103
2- Réunions finies de suites - Lemmes 1 et 2 104
3- Filtrage et réunion de suites 114

4- Interpolation linéaire par réunion de suites $\{n\ \mu_i\}$ filtrées p. 122

5- Remarques 131

7- Application à la détection

1- Introduction 135

2- Détection par un échantillonnage 136

3- Détection d'un signal sinusoïdal dans un bruit par double échantillonnage. 143

4- Détection d'un signal périodique dans un bruit 150

5- Conclusion 160

8- Application à la reconnaissance des formes périodiques

1- Position du problème 163

2- Matrices n-détectrices 166

3- Généralisation matrice (n,β) - détectrice 171

4- Reconnaissance de n formes par n échantillonnages 174

9- Conclusion 177

Bibliographie 179

Table des matières 185